Università degli Studi di Bologna

Dottorato di ricerca in Informatica giuridica e diritto dell'informatica

ciclo IX
Anni Accademici: 1993–94, 1994–95, 1995–1996

Guido Governatori

Un modello formale per il ragionamento giuridico

Cordinatore:
Chiar.mo prof.
Enrico Pattaro

Tutor:
Chiar.mo prof.
Alberto Artosi

Chiar.mo prof.
Maurizio Matteuzzi

Indice

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzi tutto Alberto Artosi che mi ha introdotto alla studio delle logiche modali e dei loro rapporti con il ragionamento normativo, e che mi ha guidato e sostenuto nella realizzazione di questa tesi; e quindi Giovanni Sartor per avermi indicato linee guida nel vasto campo dell'Intelligenza Artificiale Giuridica.

Sono riconosente a Giovanna Corsi, Max Cresswell e Maurizio Matteuzzi per la loro disponibilità e per i loro insegnamenti sulla logica e in particolare sulla logica modale; a Marcello D'Agostino e Marco Mondadori per aver discusso con me molteplici aspetti di KE; e a Michele Papa per avermi spiegato in dettaglio alcuni meccanismi del diritto italiano

Vorrei ringraziare Paolo Di Giusto, Alessio Lomuscio e Alessandra Russo e soprattutto i miei colleghi del CIRFID Paola Benassi, Paola Cattabriga, Antonino Rotolo, e Silvia Vida per aver contribuito a determinare ambienti di lavoro stimolanti con le loro discussioni sugli argomenti presentati in questa tesi, e per la loro preziosa opera di lettura delle innumerevoli bozze della stessa.

Un grazie a Rajeev Gorè, Fabio Massacci e tutti i referees anonimi che hanno giudicato, criticato, commentato, e proposto suggerimenti a lavori intermedi, presentati in convegni internazionali, che hanno portato al lavoro qui presentato; a Charles Hindley che ha fatto in modo che l'inglese di tali lavori fosse di buona qualità; e a Dov Gabbay che mi ha permesso di lavorare con lui sulla difficile disciplina dei sistemi deduttivi indicizzati di cui è l'ideatore.

Un particolare grazie va a Gloria, ai miei genitori e ai miei fratelli per aver avuto fiducia in me e essermi stati vicini in tutti questi anni.

CAPITOLO 1

Logica e diritto

1.1 Diritto e intelligenza artificiale

Il continuo sviluppo scientifico e il crescente progresso tecnologico comportano che ogni disciplina, per rimanere viva e attuale, e inserita nel contesto della società civile, deve evolversi e aggiornarsi. Il diritto, in particolare, non si sottrae a tale assunto: l'enorme crescita dell'automazione nel campo matematico, e i più recenti tentativi di intelligenza artificiale, intesa come riproduzione formale del ragionamento[1], promuovono l'utilizzo di strumenti informatici applicati al diritto (informatica giuridica) e, nel contempo, comportano una sempre più massiccia applicazione del diritto all'informatica (diritto dell'informatica).

$$
\begin{tikzcd}
\text{Diritto} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{Intelligenza Artificiale} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \text{Informatica giuridica} &
\end{tikzcd}
$$

In questo lavoro si fa riferimento unicamente all'informatica giuridica in senso stretto, vale a dire l'applicazione di tecniche e metodiche dell'intelligenza artificiale, e in particolare della logica, al diritto. È possibile delineare tre principali settori di applicazione dell'intelligenza artificiale al diritto:

1. archiviazione delle leggi e della giurisprudenza;

[1]Secondo la definizione comunemente accettata, per intelligenza artificiale si intende quella disciplina che si propone di realizzare strumenti informatici in grado di compiere attività che, se fossero svolte da uomini, sarebbero attribuite alla loro intelligenza. In particolare si possono identificare due principali aree di ricerca: (1) compiti del senso comune, compiti che tutti gli uomini, in generale, sono in grado di affrontare, senza la necessità di una preparazione specifica; (2) compiti da esperti, compiti che possono essere svolti solo da persone dotate di formazione e competenze specifiche; si veda (Rich 1987).

2. analisi del diritto;

3. sviluppo legislativo.

In questo capitolo tratteremo brevemente questi tre settori, cercando di individuare quale sia il ruolo della logica in ciascuno di essi. Naturalmente, qualunque approccio al problema è fortemente influenzato del sistema legislativo vigente. Ad esempio, in un sistema di common law l'analisi, la previsione e la soluzione di un certo problema si rifaranno ai principi estrapolati dai costumi della società (morale) e ai precedenti giurisprudenziali, mentre in un sistema di diritto positivo la *ratio decidendi* dipenderà in primo luogo dai principi espressi o desunti dalle leggi, e solo in mancanza di essi dai precedenti e dai costumi.

Per archiviazione del diritto si intende soprattutto il problema di gestire e ottimizzare basi di dati giuridici, in maniera da sveltire e facilitare i processi di ricerca e consultazione, consentendo nello stesso tempo una ricerca a un ampio novero di utenti. I principali sistemi di gestione di basi di dati, come ad esempio in Italia il sistema ITALGIURE, sono impostati per una ricerca testuale delle informazioni o mediante una ricerca per campi (ad esempio, data di emissione, settore), o mediante confronto di stringhe, trattazione di sinonimie, thesaurus,... o una combinazione di questi. In pratica, la ricerca consiste nell'esaminare se un dato cercato compare in qualche "scheda" in possesso della base di dati, e nel fornire le coordinate rilevanti per identificare sia dove si trova il documento che soddisfa le richieste sia per determinare di che tipo di documento si tratta.

Nonostante i sistemi automatici di archiviazione (*information retrival*) siano di notevole aiuto all'attività dei giuristi, siamo ben lontani dal poter parlare di intelligenza artificiale applicata al diritto. Infatti, se definiamo intelligenza artificiale quella disciplina che studia come simulare o riprodurre il ragionamento umano, e intelligenza artificiale applicata ad una materia quella disciplina che studia come simulare o riprodurre il ragionamento di un esperto della materia, ci si accorge che i database non costituiscono, a rigore, oggetto di applicazione dell'intelligenza artificiale giuridica, dato che riproducono un lavoro che potrebbe essere svolto da qualunque persona in grado di leggere e comprendere la lingua in cui i documenti sono redatti, a patto di avere accesso a tutti i documenti. Il compito di questa branca dell'informatica giuridica consiste, principalmente, nel definire quali siano le chiavi di ricerca ed eventuali collegamenti tra le varie chiavi.

Tuttavia, l'enorme sviluppo delle reti telematiche propone nuove soluzioni e pone nuovi problemi alle basi di dati: l'interazione di più basi di dati. Infatti, è possibile avere dati immagazzinati in diverse basi di dati con criteri differenti; tuttavia può sorgere la necessità di svolgere contemporaneamente delle ricerche su più database e interfacciare tra di loro i risultati della ricerca al fine di determinare anche dati che soddisfano una richiesta concernente un campo non determinato in nessuno dei database, ma determinato tramite una definizione in un database virtuale, che viene utilizzato sia per fornire delle risposte a delle query (standard e non[2]), sia per determinare se una query non standard è effettivamente richiedibile.

In Italia, ad esempio, esistono varie grandi banche di dati giuridici, come il già citato sistema ITALGIURE della Corte di Cassazione, volto principalmente all'archiviazione della legislazione, della giurisprudenza e della dottrina; il sistema della camera dei Deputati, destinato all'archiviazione di informazioni complementari a quelle del sistema della Corte di Cassazione, in qualche modo interessato alla storia della leggi promulgate; e il sistema del Senato dove si raccolgono le informazioni volte a ricostruire l'iter parlamentare delle leggi da promulgare. Ognuno di questi sistemi contiene informazioni in parte differenti e archiviate in maniera differente. Non è difficile ipotizzare una richiesta che comporti l'elaborazione di informazioni prese da tutti questi database. Una siffatta richiesta potrebbe vertere, ad esempio, su di un caso di interpretazione. Infatti, l'interpretazione richiede di conoscere e di interfacciare sia la legislazione, sia la giurisprudenza, sia la dottrina, sia la storia delle leggi per poter ricostruire l'intento del legislatore; occorre conoscere inoltre gli eventuali progetti di modifica delle leggi coinvolte per vedere se il concetto in esame ha subito una evoluzione nella società e se la normativa richiede un corrispondente adeguamento.

La logica ci fornisce strumenti matematici e informatici per questi problemi. Ad esempio, il problema di dati immagazzinati in basi di dati differenti e con criteri differenti può essere trattato con il PROLOG, o altri sistemi di deduzione basati su *integrity constraints*[3], mentre il problema delle query

[2]Per "query non standard" intendiamo una interrogazione ad un database rispetto ad un campo non precedentemente definito.

[3](Geneseret 1996)

non standard può essere trattato, una volta che abbiamo risolto il problema precedente e formalizzato in termini logici la struttura della rete di basi, applicando il teorema di Beth (1953) sulla definibilità dei predicati in logica predicativa e nelle sue estensioni a logiche intensionali[4].

Un sistema di information retrival basato su più basi di dati relate tra loro è già un primo esempio di quello che ci si potrebbe aspettare da un cosiddetto *sistema esperto*. Un sistema esperto è un sistema basato sulla conoscenza che è in grado di eseguire compiti che richiedono conoscenze specifiche, e che quindi possono venire svolti solo da esperti o, comunque, da persone dotate di notevoli competenze. Il concetto di sistema esperto si compone quindi di due elementi:

1. un elemento strutturale, in ragione del quale il sistema è basato sulla conoscenza, cioè è composto da una base di dati distinta dal motore inferenziale;

2. un elemento funzionale, in ragione del quale il sistema deve essere in grado di fornire prestazioni che richiedano notevoli competenze.

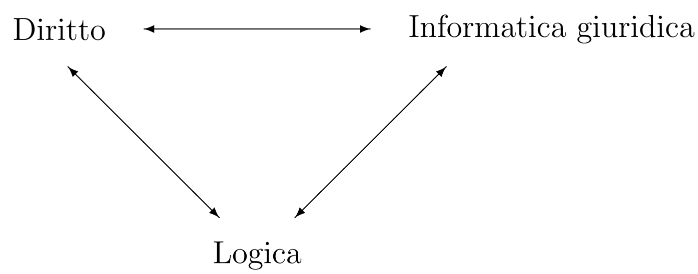
I sistemi esperti devono quindi fornire risposte a quesiti in ragione della loro base di conoscenza. In sostanza, il punto 2 consiste principalmente nell'elaborazione e manipolazione dei dati in possesso[5].

Si può quindi considerare come parte centrale dell'informatica giuridica lo studio dei ragionamenti (inferenze), suscettibili di essere trattati con metodi matematici, che si prestano a essere applicati nel e al diritto: alla sua analisi, come alla attività di consulenza giuridica, alla attività processuale, alla costituzione del diritto, ecc.

In altre parole, il problema si riduce a determinare se un dato è una conseguenza di una "base di dati", ovvero, in termini logici, se una conseguenza è deducibile da un insieme di premesse. La logica è quella disciplina che studia i concetti di conseguenza, deducibilità e simili. Possiamo dunque schematizzare i rapporti tra diritto, informatica giuridica e logica come segue.

[4](Fitting 1983)

[5]Per una definizione più precisa ed una panoramica dettagliata dei sistemi esperti giuridici si vedano ad esempio (Susskind 1987, Sartor 1990, Sartor 1992).



Bisogna ora determinare quale logica è adeguata alla rappresentazione della conoscenza in ambito giuridico; inoltre bisogna determinare quali settori della logica sono particolarmente rilevanti per il diritto.

1.2 Logica e intelligenza artificiale applicata al diritto

Uno dei settori dell'intelligenza artificiale applicata alle scienze umane in costante crescita è quello delle applicazioni di metodiche dell'intelligenza artificiale al diritto, e in particolare lo studio delle relazioni fra logica deontica e informatica[6]. I cosiddetti sistemi esperti, come si è già detto, sono costituiti da una base di dati (base di conoscenza) e da un motore inferenziale. La logica si interessa di determinare quali siano le forme di inferenza valide; la logica deontica è quel ramo della logica filosofica che si occupa del ragionamento normativo, in particolare del ragionamento in cui sono definiti i concetti di obbligo, permesso, vietato o simili. Si comprende allora come lo studio dei sistemi deduttivi per le logiche deontiche possa costituire uno dei fondamenti dell'informatica giuridica in senso stretto sia per l'aspetto legislativo che per quello giurisprudenziale.

Ciò nonostante, questo campo di ricerca è stato ed è in gran parte trascurato[7]. Infatti, fino al lavoro di Fitch (1966a), le logiche deontiche venivano

[6]Questo interesse è dimostrato dall'istituzione di convegni internazionali periodici tra cui ricordiamo l'ICAIL (International Conference on Artificial Intelligence and Law) e il ΔEON (Deontic logic in computer science).

[7]Si consideri inoltre che la maggior parte dei paradigmi esistenti si basano sulla programmazione logica e il PROLOG, senza tener conto che la risoluzione — tecnica inferenziale base del PROLOG — non sempre è applicabile efficacemente alle logiche intensionali, non classiche e substrutturali. Su questo punto si veda (D'Agostino and Gabbay 1994); inoltre non sempre è possibile fornire forme clausali per tutte le logiche modali (Hughes and Cresswell 1968).

trattate in maniera assiomatica. Tuttavia, fare dimostrazioni con il metodo assiomatico richiede, per dirla con Quine (1959), una buona dose di ingegno, esperienza e fortuna. Come è noto, le doti richieste per costruire dimostrazioni automatiche in maniera assiomatica, difficilmente sono possedute da un elaboratore elettronico; di conseguenza il trattamento assiomatico non determina algoritmi per ottenere dimostrazioni. I sistemi di deduzione naturale (come quello di Fitch) traggono origine dal calcolo dei sequenti che risulta equivalente ai tableaux semantici[8].

Il problema principale delle logiche modali, e quindi deontiche, consistente nella mancanza di una semantica adeguata, fu risolto da Kripke (1959), utilizzando tra l'altro i tableaux, aprendo così la strada all'impiego di strumenti semantici per l'analisi delle logiche modali[9]. Come è noto, la semantica kripkeana, la cosiddetta semantica a mondi, possibili, stabilisce una semantica tarskiana rispetto ad una collezione di mondi possibili (descrizioni di stato in Carnap (1976), "possibilità" in Humberstone (1981), o più semplicemente situazioni controfattuali[10]), e i rapporti intercorrenti tra i vari mondi in questione. Il punto fondamentale per determinare algoritmi che consentano di trattare con logiche deontiche è stabilire operazioni che consentano di passare da un mondo all'altro senza perdere informazioni essenziali per la deduzione (sistemi deduttivi) o per la refutazione (tableaux).

Ora, come è possibile usare informazioni semantiche all'interno di dimostrazioni sintattiche (linguistiche)? Partendo da un'idea di Fitch (1966b) si considera un linguaggio oggetto in cui vengono assunte formule indicizzate, cioè formule in cui un apposito simbolo (detto indice o etichetta) ci informa del mondo possibile (da ora in poi semplicemente mondo) in cui la formula assume un determinato valore di verità. I primi sistemi di questo genere sono dovuti a Fitting (1972, 1983) che riprese ed elaborò in forma sistematica l'idea di Fitch. Successivamente molti autori hanno sviluppato sistemi tableaux o tipo tableaux per trattare logiche modali. Tutti questi sistemi trattano particolari logiche. Solo con l'avvento della disciplina dei sistemi deduttivi indicizzati (LDS da *Labelled Deductive Systems*) di Gabbay(1996b)

[8]Si ricordi che i tableaux semantici sono uno strumento che determina automaticamente la validità, e vengono comunemente assunti come paradigma di dimostrazione automatica per le logiche non classiche, cfr. nota 7.

[9]I primi lavori di logica deontica in cui viene fatto uso di una semantica kripkeana a mondi possibili sono dovuti a Hanson (1965)

[10](Lewis 1986, Kripke 1971)

è stato possibile trattare le logiche modali in maniera generale e suscettibile di numerose applicazioni sia per quanto riguarda l'intelligenza artificiale, sia per lo sviluppo di nuovi sistemi logici. Forniamo ora una breve descrizione di questo approccio.

Nei termini di LDS una logica $\mathscr{L}$ viene definita come $\langle \vdash, S_\vdash \rangle$, dove $\vdash$ è una certa relazione di conseguenza logica matematicamente definita da alcune condizioni minimali[11]. Il nocciolo di tale questione risiede nel fatto che una logica non viene più rappresentata come l'insieme di formule valide secondo alcune condizioni, bensì con un algoritmo; così la deduzione naturale per il calcolo proposizionale differisce dalla deduzione per l'assiomatico, in quanto sono caratterizzate da algoritmi deduttivi differenti che determinano lo stesso insieme di conseguenze $\mathrm{Cn}(\mathscr{L})$. Infatti, ad esempio, il calcolo dei sequenti e le tavole di verità determinano proposizionalmente lo stesso $\mathrm{Cn}(\mathscr{L})$, ma non succede lo stesso al livello predicativo. D'altro canto, esistono algoritmi simili per trattare sistemi logici differenti, così il calcolo dei sequenti nelle sue varie sfumature consente di trattare la logica intuizionista, logiche modali, logiche substrutturali e loro combinazioni[12]. Si può affermare pertanto che l'intelligenza artificiale deve interessarsi agli algoritmi più efficienti e più generali, suscettibili, quindi, di trattare più nozioni di conseguenza.

La nozione di conseguenza viene definita nel meta-linguaggio ponendo alcune restrizioni sulle coppie ordinate; questo fatto può però essere rappresentato nel linguaggio stesso, come si è già detto, utilizzando formule indicizzate. Le restrizioni sulla nozione di conseguenza vengono scaricate sugli indici e, modificando le operazioni sugli indici, otterremo gli algoritmi desiderati.

Un sistema di deduzione indicizzato (LDS) è costituito da una tripla ordinata $\langle \mathscr{S}, \mathscr{A}, \mathscr{E} \rangle$ dove $\mathscr{S}$ è un linguaggio logico (connettivi, operatori, formule ben formate), $\mathscr{A}$ è un'algebra degli indici, con le appropriate operazioni, e $\mathscr{E}$ è la disciplina di indicizzare formule di $\mathscr{S}$ rispetto a $\mathscr{A}$, congiuntamente a regole di deduzione che rispecchiano la propagazione degli indici in accordo con la semantica intesa per la logica in questione. In questa prospettiva

[11] $\vdash$ è l'insieme delle coppie in $(\wp(\mathrm{FBF}))^2$ che godono di una qualche relazione; per una più ampia trattazione si vedano (Wójcicki 1989, Scott 1974, Gabbay 1976). Ad esempio, in un sistema assiomatico avremo che le coppie saranno definite in $\mathsf{A} \times \wp(\mathrm{FBF})$, dove A è un insieme di formule dette assiomi e $S_\vdash$ è un algoritmo per determinare $\mathrm{Cn}(\mathscr{L}) = \Pi_{\wp(\mathrm{FBF})}(\mathsf{A} \times \wp(\mathrm{FBF}))$, che risulta essere $S_\vdash(\mathsf{A})$ e che coincide con l'insieme di regole di deduzione e di inferenza.

[12] (D'Agostino and Gabbay 1994, D'Agostino, Gabbay and Russo 1996)

una logica è una coppia ordinata $\langle \vdash, LDS_{\vdash} \rangle$. Come si può facilmente intuire, una coppia ordinata sarà suscettibile di molteplici interpretazioni a seconda di cosa rappresentano gli indici; infatti una stessa coppia può rappresentare la deduzione naturale, logiche modali, logiche deontiche, logiche temporali, logiche substrutturali e molte altre[13]. Uno dei principali vantaggi dei LDS risiede nel fatto che possono venire definite relazioni di conseguenza e algoritmi sia sulla parte enunciativa che sulla parte indicizzata di una formula, consentendo: (1) un'analisi estremamente precisa, dettagliata e sensibile del fenomeno che si vuole trattare; (2) la definizione di "concetti" non altrimenti esprimibili.

1.3 Logica e diritto

È noto che tra i filosofi del diritto sono state sollevate notevoli perplessità e obiezioni contro l'adeguatezza della logica come strumento per l'analisi e la chiarificazione concettuale del ragionamento giuridico[14]. In questo paragrafo si cercherà di mostrare che tali obiezioni e perplessità si basano su un pregiudizio e su un totale fraintendimento del ruolo della logica nell'analisi del ragionamento giuridico.

L'argomento principale per cui la logica non può applicarsi al diritto si basa sul pregiudizio secondo cui la logica si interessa della verità e falsità di enunciati; è risaputo che le norme non sono nè vere nè false, quindi non possono essere oggetto di analisi da parte della logica[15]. Al più può esistere una logica delle *proposizioni* normative[16].

Questo argomento si dissolve se pensiamo piuttosto alla logica come la disciplina che studia la nozione di conseguenza e i valori vero / falso come dicotomia isomorfa a (1,0)[17]. È vero che la logica, in quanto linguaggio, usa e si interessa di proposizioni; queste tuttavia non sono l'*oggetto* della logica,

[13](Gabbay 1996b)

[14]Per una panoramica e un'esposizione delle principali posizioni si vedano tra gli altri (Tarello 1974, 443–474) e (Mazzarese 1989).

[15]Questa posizione è nota come il dilemma di Jørgensen.

[16]Questa è la posizione di Kelsen fino alla seconda edizione della *Dottrina pura del diritto*. Una posizione analoga è sostenuta da (von Wrigth 1989).

[17]La dicotomia 1,0 è quella classica della logica bivalente, ma può essere utilizzata anche in logiche a più valori interpretando 1 come "essere una conseguenza" e 0 come "non essere una conseguenza".

ma intendono fornire una *rappresentazione formale* del fenomeno in esame, per esempio le proprietà dei numeri, nel caso dell'aritmetica, le proprietà delle norme nel caso del ragionamento normativo.

La rappresentazione formale avviene in tre fasi: 1) la prima fase consiste nella definizione della logica con il suo linguaggio costituito da connettivi, operatori e altri simboli formali, le regole d'inferenza e i suoi assiomi — le regole d'inferenza e gli assiomi determineranno l'insieme delle conseguenze. 2) La seconda fase (realizzazione) stabilisce i rapporti tra gli "oggetti" e i "concetti" del fenomeno in questione e i simboli del linguaggio formale. 3) La terza e ultima fase (determinazione del modello) assegna dei valori, detti valori di verità, alle formule del linguaggio formale.

Abbiamo parlato di valori di verità. Identifichiamo pure questi valori con il vero e con il falso, anche se, come vedremo e come abbiamo già sottolineato, l'unica cosa importante è il loro essere dicotomici. Come vengono assegnati i valori di verità alle proposizioni? Rifacendoci alla convenzione T di Tarski.

> Una corretta definizione del simbolo Tr, formulata nel metalinguaggio è una "definizione adeguata di verità" se implica:
>
> (α) tutte le proposizioni della forma
> $x \in Tr$ se e solo se p
> dove "p" deve essere sostituito da un qualunque enunciato della lingua in esame e "x" da un qualunque nome individuale di quell'enunciato, a condizione che questo nome compaia nel metalinguaggio. (Tarski 1983)

Sia x una lettera proposizionale, "la neve è bianca" la realizzazione di x, e sia p l'enunciato che la neve è bianca. In base alla convenzione T avremo

"la neve è bianca" è vero se e solo se la neve è bianca

La convenzione T vuole stabilire un nesso tra il valore vero e la realtà come sottolineato dal seguente passaggio.

> come esempi caratteristici di concetti semantici possiamo ricordare i concetti di *denotazione*, *soddisfazione*, e *definizione* .... Tra questi concetti va classificato anche quello di *verità* — ciò che di solito non viene ammesso —, almeno nella sua interpretazione classica, seconda la quale "vero" equivale a "corrisponde alla realtà". (Tarski 1973)

Il concetto di "realtà" corrisponde all'universo del discorso del fenomeno che vogliamo esaminare, pertanto possiamo riformulare la convenzione T come segue:

> il valore di verità di x è 1 (vero) se e solo se p è un elemento dell'universo del discorso.

dove x è un elemento del linguaggio logico formalizzato corrispondente alla traduzione di p.

Le logica non usa "oggetti" dell'universo del discorso ma parla di essi attraverso proposizioni. L'enunciato "la neve è bianca" afferma che l'oggetto (neve) la cui rappresentazione nel linguaggio è "neve" gode della proprietà (bianco) corrispondente al predicato "è bianca". Una logica dei sistemi normativi è una logica di oggetti chiamati norme[18]. Un oggetto non è nè vero nè falso, così come non lo sono le norme, ma gode o non gode di alcune proprietà. La proprietà rilevante per le norme è il loro essere sistemicamente valide o non valide[19], ovvero l'essere valide rispetto a un dato sistema normativo, che corrisponde all'universo del discorso[20].

Mostriamo ora che, se la logica si interessa della verità e falsità di enunciati, allora non può essere applicata neppure alla matematica. Utilizzeremo a tale scopo l'aritmetica di Peano (PA). L'espressione $\vdash_{PA} A$ significa che A è un teorema di PA, ed è un'espressione metalinguistica, in quanto il simbolo $\vdash_{PA}$ non è definito nel linguaggio di PA. Se A è un teorema di PA allora è dimostrabile in PA che A è un teorema di PA, ma l'espressione $\vdash_{PA}\vdash_{PA} A$ è mal formata e non ha senso; tuttavia è possibile definire in PA un predicato Pr che significa grossomodo "è dimostrabile in PA". Gli oggetti dell'universo del discorso di PA, che corrispondono alle variabili e costanti di PA, sono i numeri naturali, quindi per poter applicare il predicato Pr ad A dobbiamo trasformare A in un numero. Questo è possibile tramite la funzione di Gödelizzazione che associa, in maniera univoca, ad ogni simbolo del lin-

---

[18] In questo contesto non ci interesseremo della natura ontologica delle norme.

[19] Per la nozione di norma sistemicamente valida, si veda (Mazzarese 1989).

[20] In altre parole una norma è sistemicamente valida se appartiene al sistema normativo. Partendo da questa considerazione (Bulygin 1982, Alchourrón e Martino 1989) propongono di utilizzare la nozione di conseguenza, intesa come insieme chiuso rispetto a date proprietà, come punto di partenza per una logica del ragionamento normativo. Come vedremo, in questo lavoro adotteremo una posizione che estende quella assunta dagli autori appena citati.

guaggio oggetto s un numero naturale $\mathbf{s} = \ulcorner s \urcorner$, detto numero di Gödel di s. Dunque $\vdash_{PA} A$ viene rappresentato in PA come $Pr\ulcorner A \urcorner$, inoltre l'espressione $\vdash_{PA} Pr\ulcorner A \urcorner$, che significa: è dimostrabile in PA che A è un teorema di PA, è rappresentabile nel linguaggio stesso come $Pr\ulcorner Pr\ulcorner A \urcorner\urcorner$ e così via. Come di consueto, identificheremo una logica, o una teoria, con l'insieme di formule che sono dimostrabili in essa (insieme di conseguenze sintattiche)[21]. Data la rappresentabilità delle formule come numeri, possiamo rappresentare le formule con i numeri di Gödel ad esse corrispondenti, in particolare $PA = \{\ulcorner A \urcorner : \vdash_{PA} A\}$ o in PA stesso come $PA = \{\ulcorner A \urcorner : \ulcorner Pr\ulcorner A \urcorner\urcorner \in PA\}$. Risulta pertanto che $PA \subset \mathbb{N}$. Quindi, ad esempio, data la formula "1+1=2", avremo $\vdash_{PA} 1+1=2$ e $\ulcorner 1+1=2 \urcorner \in PA$. Sia $\mathbf{n} = \ulcorner 1+1=2 \urcorner$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ è il numero di Gödel di $1+1=2$. Ora $\mathbf{n}$ corrisponde alla "realtà" di PA dato che $\vdash_{PA} 1+1=2$ quindi "$1+1=2$" è vero. Ha senso chiedersi se $\mathbf{n}$ è vero? No, un numero non è nè vero nè falso. Tuttavia $\mathbf{n}$ corrisponde alla realtà di PA.

Se la logica si occupasse dei valori di verità vero e falso allora non potrebbe occuparsi dell'aritmetica di Peano. Ma, dal momento che si occupa dell'aritmetica di Peano, essa non si occupa dei valori di verità vero e falso.

Siano $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ i numeri di Gödel di $A \to B$, A e B; possiamo chiedere se $\mathbf{r}$ è una conseguenza logica di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$? Sì, dal momento che in PA è possibile definire un predicato ternario $Mp(x, y, z)$ soddisfatto da quei numeri che sono i numeri di Gödel di formule la cui relazione è quella di essere le permesse e la conclusione di una inferenza del tipo Modus Ponens. Da questo esempio si vede come la logica non si interessi dei valori di verità, ma della nozione di conseguenza.

L'esempio appena fatto mostra che anche il ragionamento normativo può essere sottoposto a indagini logiche. Resta da determinare quale è la struttura logica che si adatta a tale fenomeno, la deduzione di conseguenze giuridiche da premesse giuridiche[22]. Per prima cosa definiamo cosa si intende per sistema

[21] Si noti che non ha senso identificare una logica, o una teoria, con l'insieme delle formule vere secondo l'interpretazione della teoria, altrimenti quale sarebbe il senso di teoremi di completezza che stabiliscono l'inclusione dell'insieme di conseguenze semantiche (insieme delle formule interpretate come vere) rispetto l'insieme delle conseguenze sintattiche (formule dimostrabili)?

[22] Per l'uso del concetto di conseguenza come base per lo studio di una logica per il ragionamento normativo si veda (Alchourrón e Martino 1989).

deduttivo: un sistema deduttivo è costituito da un insieme di enunciati e da regole d'inferenza, e pertanto può essere pensato come una teoria.

Logicamente il diritto è una teoria, o un insieme di teorie, dunque sarà composto da un insieme di assiomi logici, e da un insieme di assiomi propri giuridici[23]. Tra quest'ultimi dovremo distinguere tra assiomi strutturali e assiomi propri in senso stretto; gli assiomi strutturali sono i principi espressi con cui le leggi — gli assiomi propri — vengono processati. Ad esempio, un assioma strutturale potrebbe essere, nel caso del diritto italiano, l'articolo 12, 2° comma delle preleggi in cui si prescrive il ragionamento analogico, e un assioma proprio un qualunque articolo di un codice o di una legge. A questo punto vale la pena di ricordare la differenza logica tra regola d'inferenza e regola di deduzione[24]: una regola d'inferenza determina una relazione di conseguenza logica, in simboli $\langle \wp(\mathrm{FBF}), \mathrm{FBF} \rangle$, indipendentemente da come sono state ottenute le formule, mentre una regola di deduzione specifica le condizioni in cui una regola d'inferenza può essere applicata. Nonostante questa distinzione, parleremo di regole d'inferenza per riferirci ad entrambe, in quanto, nella maggior parte dei sistemi logici, le regole vengono fornite con i loro criteri di applicazione, anche se la modifica di quest'ultime comporta il cambiamento di logica. Vediamo come queste nozioni possono venire adattate al diritto. L'articolo 192, 1° comma del Codice di Procedura Penale prescrive che i giudici debbano "giustificare" le loro decisioni; inoltre molti altri articoli dello stesso codice determinano quando le prove sono valide, e come possono essere utilizzate al fine dell'emissione di una sentenza, ecc. Alla luce di quanto detto, il diritto penale può essere concepito come un sistema deduttivo in cui gli articoli del CPP descrivono le regole d'inferenza e di deduzione mentre gli articoli del Codice Penale sono gli assiomi. Tuttavia, bisogna tener presente che occorrono anche assiomi logici che regolano il comportamento degli assiomi strutturali e degli assiomi propri giuridici. Infatti è ovviamente anti-intuitivo negare che l'affermazione "se l'art. X prescrive A, allora l'art. X prescrive A" non sia valida.

Secondo questa concezione avremo bisogno di stabilire rapporti fra i vari codici e i vari livelli di autorità normativi. A tal fine si possono usare modelli relazionali, o modelli di Kripke, in cui ogni punto del modello rappresenta una parte a se stante di un ordinamento giuridico. Tuttavia queste parti, in

---

[23]Idee simili sono esposte in (Alchourrón and Bulygin 1971, Ferrajoli 1970).

[24](Prawitz 1965)

quanto parti di un ordinamento normativo, dovranno essere in rapporto tra di loro. Questi rapporti stabiliranno delle relazioni all'interno del modello. Queste relazioni possono essere rappresentate tramite una logica modale. Ad esempio lo studio dei vari gradi di giudizio del diritto italiano mostra che essi danno origine a una struttura finita, transitiva e irriflessiva, che è la struttura della logica della dimostrabilità GL. Una delle caratteristiche di questa logica è quella che nessun sistema (nessuna corte), all'interno di questa struttura, può stabilire la propria correttezza senza diventare incorretta, ma la correttezza di un sistema (corte) può essere stabilita da un sistema (corte) di ordine superiore[25].

Le norme stabiliscono delle situazioni ideali a cui attenersi, e anche in questo caso possiamo parlare di mondi possibili e dei rapporti fra essi. Quindi, ad un primo esame, il diritto può venire rappresentato come un insieme di teorie in relazione tra loro in una struttura relazionale, che danno origine a loro volta ad altre strutture relazionali. Per rappresentare questo fenomeno nella sua complessità possiamo utilizzare sistemi deduttivi indicizzati, in cui gli indici rappresentano mondi possibili, intesi in molteplici maniere, sia come semplici elementi di un dato insieme — mondi possibili in senso stretto —, sia come database strutturati, processi deduttivi che portano alla formula che essi etichettano, e inoltre, ad esempio, in ambito giuridico possono rappresentare insiemi di leggi e di interpretazioni dottrinali o l'iter di un procedimento giuridico.

Spesso abbiamo bisogno di trattare contemporaneamente diversi concetti intensionali, come ad esempio concetti di credenza, necessità, obbligatorietà, temporali o altri[26]. Questi, seguendo il "consiglio" di Scott[27], possono venire

[25] (Boolos 1993, Smullyan 1988)

[26] Un esempio in cui dobbiamo trattare con più operatori intensionali è l'articolo 368 del codice penale riguardante la calunnia

> Chiunque, con denunzia (331s c.p.p.), querela, richiesta o istanza (336s c.p.p.), anche se anonima o sotto falso nome, diretta all'Autorità giudiziaria o un'altra Autorità che a quella abbia l'obbligo di riferirne, incolpa di un reato taluno che egli sa essere innocente, ovvero simula a carico di lui tracce di un reato, è punito con la reclusione da due a sei anni.

Infatti l'articolo, in quanto "norma", comporta un obbligo che concerne una conoscenza. Si noti inoltre i rimandi al CPP, che stabiliscono relazioni tra i due codici, e quindi tra le punti del modello ad essi corrispondenti.

[27] (Scott 1970)

trattati in maniera estensionale mediante l'assegnazione di un diverso operatore logico, dando origine a sistemi "multimodali". La trattazione semantica usuale dei sistemi multimodali assegna a ogni operatore un tipo di mondo possibile, stabilisce relazioni all'interno delle varie classi di mondi, nonché tra mondi appartenenti a classi differenti. I sistemi deduttivi indicizzati offrono due diverse possibilità per trattare i sistemi multimodali; la prima si conforma alla trattazione usuale, mentre la seconda consente l'utilizzo di algoritmi all'interno di un singolo indice, ad esempio nidificandolo, e, pertanto consentono la trattazione temporale di indici che a loro volta rappresentano altre nozioni temporali[28]. Un esempio normativo di quanto appena detto consiste in una norma emanata da una certa autorità in un certo tempo che prevede alcune scadenza, e una seconda norma, emanata da un'altra autorità, promulgata in un tempo successivo, che deroga la prima, con delle eccezioni per particolari scadenze. In questo caso avremo bisogno di definire degli indici per le varie autorità[29] e di studiare i rapporti fra esse, vale a dire se le due autorità sono paritetiche o se sono in un rapporto gerarchico, e se lo sono stabilire quale rapporto gerarchico intercorre fra loro, se l'una sia subordinata all'altra completamente o solo per alcuni aspetti e così via[30]; inoltre dovremo definire indici che descrivano i vari rapporti temporali degli eventi (emanazione, scadenze, deroga, eccezioni) prescritti dalle norme.

Uno dei vantaggi dei sistemi deduttivi indicizzati risiede nella sua duttilità, che, tra l'altro, comporta la possibilità di definire algoritmi differenti a seconda della parte in esame del fenomeno che si vuole trattare. Si possono definire regole d'inferenza che si occupano solamente di alcune parti dell'indice, altre che regolano le relazioni fra parti di indici, altre che fungono da intermediari tra gli indici e la parte enunciativa e così via, permettendo un'analisi dettagliata e sensibile del fenomeno in esame. Inoltre, è possibile utilizzare regole d'inferenza differenti, a seconda del loro tipo di indice delle formule coinvolte. Rifacendoci a quanto abbiamo detto nel paragrafo pre-

[28](Finger and Gabbay 1993)

[29]Per una trattazione in logica deontica del concetto di autorità si veda (Bailache 1991).

[30]Per un'analisi dei rapporti gerarchici fra autorità da punto di vista logico si veda (Alchourrón and Makinson 1981, Royakkers 1996).

cedente, l'importazione nel linguaggio oggetto di informazioni semantiche, relative ai mondi possibili, comporta che il cambiamento delle condizioni sugli indici possa essere ottenuto sia modificando relazioni all'interno degli indici stessi sia utilizzando semantiche differenti.

Stabilite queste premesse, importanti per determinare la struttura logica del diritto, passiamo ad affrontare uno dei problemi principali: la traduzione del linguaggio giuridico in un linguaggio logico formalizzato.

Ci si presentano due possibilità: la prima, sintattica, che consiste nel fissare il significato formale delle possibili diverse interpretazioni in simboli del linguaggio oggetto differenti[31]. La seconda sfrutta un approccio sintattico-semantico e si basa sulla rappresentazione a mondi possibili delle varie interpretazioni. Abbiamo visto che spesso vengono chiamati in gioco concetti intensionali, inoltre una delle caratteristiche fondamentali e irrinunciabili del linguaggio giuridico, pur trattandosi di un linguaggio semi-formale, è la sua stretta connessione, sancita nel caso dell'ordinamento giuridico italiano dalla legge stessa, con il linguaggio naturale. Infatti l'art. 12 delle Disposizioni sulla legge in generale del CC impone all'interprete di aver riguardo innanzi tutto al

> senso . . . fatto palese dal significato proprio delle parole secondo la connessione di esse e dalla intenzione del legislatore.

Tuttavia, come è risaputo, il linguaggio naturale risulta per sua stessa natura ambiguo. Esistono però differenti tipi di ambiguità. Uno dei prototipi di ambiguità più conosciuti e studiati in ambito logico e di filosofia del linguaggio è quello della *referenza opaca*: un'espressione si riferisce a "oggetti", individui, situazioni, azioni, . . . differenti a seconda della circostanza.

Una tipica espressione del genere è la seguente frase:

> I versamenti devono essere effettuati entro l'ultimo giorno del mese.

Chiaramente, se il mese in questione è febbraio, l'espressione "ultimo giorno del mese" non si riferirà allo stessa data, come normalmente avviene per gli altri mesi, bensì a due date differenti non equivoche a seconda che l'anno sia o no bisestile.

[31]Un esempio di questo approccio applicato al diritto è rappresentato dal sistema NORMALIZER di Allen (1986).

Riteniamo corretto pensare che la logica modale, in particolare la sua semantica relazionale a mondi possibili, possa costituire la base per una descrizione formale dei casi in questione. Predicati e nomi possono ricevere differenti interpretazioni, in differenti mondi possibili ricalcando così quanto stabilito dall'articolo 12 sopra citato.

Nel caso in esame, un modello formale solo per la parte temporale della proposizione ha la seguente struttura;

$$\langle A, M, D, i \rangle \ ,$$

dove A è l'insieme degli anni, M è l'insieme dei mesi, D è l'insieme dei numeri naturali da 1 a 31 (le date) e i, l'interpretazione, è una funzione così definita:

$$i(f) : M \times A \mapsto D \ ;$$

in sostanza, i assegna al simbolo di funzione f "ultimo giorno di", applicata ad un elemento di M, rispetto a un anno — un elemento di A —, una data. Quindi:

$$i(\text{ultimo giorno di}(\text{marzo}), 1995) = 31$$

per ogni anno, ma, ad esempio

$$i(\text{ultimo giorno di}(\text{febbraio}), 1995) = 28$$
$$i(\text{ultimo giorno di}(\text{febbraio}), 1996) = 29.$$

La struttura utilizzata per analizzare formalmente questo caso è una struttura tipica della semantica modale[32].

Altri casi di ambiguità si danno quando il riferimento non è determinato univocamente all'interno della stessa situazione. Un caso tipico è la frase:

Tutti gli uomini amano una donna.

Tale frase si presta a una duplice interpretazione: nella prima si afferma che ogni uomo ama una particolare donna; la seconda presuppone che c'è una donna che è amata da tutti gli uomini. In questo caso l'ambiguità deriva della parola "tutti", che può venire interpretata o come un intero o come una collezione di singoli ognuno preso individualmente.

[32]Descrizioni e discussioni dettagliate riguardo le questioni qui accennate si possono trovare ad esempio in (Cresswell 1985, Cresswell 1990, Cresswell 1994).

Le due interpretazioni corrispondono alle seguenti rappresentazioni formali:

$$\forall x \exists y Axy \tag{1.1}$$

$$\exists y \forall x Axy \tag{1.2}$$

dove x varia sull'insieme degli uomini, y su quello delle donne e la realizzazione del predicato "A" è "…ama⋯"[33]. È facile vedere che 1.1 e 1.2 hanno una differente forza logica, infatti 1.2 implica logicamente 1.1, ma non viceversa[34]. Nel primo caso la x vincola la y, mentre nel secondo la y vincola la x in base alla posizione e al tipo dei quantificatori. Normalmente, i quantificatori e le variabili vengono ritenuti i responsabili di questo tipo di ambiguità in quanto, in un certo qual modo, introducono campi di azione non rigidamente determinati. Mostreremo ora, rifacendoci ad un caso giuridico concreto, come le ambiguità non dipendono esclusivamente dai quantificatori ma anche da altri connettivi e operatori logici e linguistici.

Nella sentenza 18/96 della Pretura di Bologna, sezione distaccata di Imola, viene esaminata l'interpretazione dell'articolo 1, 2° comma della legge n. 379/1990 che stabilisce

> L'indennità di cui a comma 1 viene corrisposta in misura pari all'80% di cinque dodicesimi del reddito percepito e denunciato ai fini fiscali dalla libera professionista nel secondo anno precedente a quello della domanda.

La questione viene sollevata dall'interpretazione della congiunzione riferita a *reddito percepito* ***e*** *denunciato ai fini fiscali*. Secondo la prima interpretazione la norma deve essere intesa nel senso che il reddito da tener presente è quello percepito nel secondo anno che precede quello della domanda, nella misura denunciata dalla professionista ai fini fiscali nell'anno successivo, secondo le norme che regolano la denuncia dei redditi. La seconda interpretazione invece sostiene che il reddito cui si deve fare riferimento è soltanto quello denunciato ai fini fiscali nel secondo anno precedente quello della denuncia: cioè quello percepito nell'anno precedente. In base a queste interpretazioni si presentano due differenti indennità

---

[33]Per la nozione di realizzazione si veda, ad esempio (Epstein 1990, Epstein 1994).

[34]Su questo punto, e per altri esempi del genere, si veda ad esempio (Lemmon 1986).

Come abbiamo già ricordato, l'articolo 12 delle Disposizioni sulla legge in generale impone in primo luogo una interpretazione della legge in base al senso della formulazione linguistica della norma. L'analisi del testo della norma mette in risalto come l'espressione temporale "nel secondo anno precedente" sia riferita agli attributi verbali "percepito e denunciato" del sostantivo "reddito". I predicati verbali sono uniti da una congiunzione, e quindi rimangono indifferenziati ed indistintamente collegati a "reddito". Pertanto la formulazione della norma, in base ad una lettura esterna della congiunzione risulta essere

$$reddito = \iota x(Percepito(x, y-2) \wedge Denunciato(x, y-2)) \tag{1.3}$$

$$indennità = f(reddito) \tag{1.4}$$

e

$$Pagare(indennità) \tag{1.5}$$

Qui *Percepito* e *Denunciato* sono predicati a due posti, rispettivamente reddito e anno[35], la costante *indennità* è invece ottenuta tramite una funzione f che prende *reddito* come argomento. Come noto il reddito *percepito* in un dato anno deve e può essere *denunciato* nell'anno successivo a quello in cui è stato conseguito; e quindi $Denunciato(x, y)$ e $Percepito(x, y)$ saranno collegati fra loro dalle seguenti relazioni:

$$Percepito(x, y) \rightarrow Denunciato(x, y+1) \tag{1.6}$$

$$Denunciato(x, y) \rightarrow Percepito(x, y-1) \tag{1.7}$$

È facile vedere che si tratta quindi di situazioni che si verificano in anni differenti e che la costante *reddito* non è denotante. Il pretore argomenta quindi che

> per tali ragioni l'analisi logico-letterale delle espressioni della legge non serve né è sufficiente a risolvere il dubbio, se il reddito da calcolare per l'indennità, debba essere quello "*percepito*" o quello "*denunciato*" nel secondo anno precedente.

[35]Si noti come la costante *reddito* sia ottenuta tramite operatore ι di Russell; su questo punto si vedano ad esempio (Epstein 1994, Hughes and Cresswell 1996).

Pertanto possiamo concludere che affermando che entrambe le interpretazioni, che propongono una lettura interna della congiunzione, sono compatibili con la formulazione della norma. Nel capitolo 4 torneremo su questo caso, e lo esamineremo alla luce di quanto esposto in tale capitolo.

La logica deontica può in alcuni casi aiutare a formulare norme conformi alle intenzioni del promulgatore, ad esempio un articolo di un'ordinanza della Capitaneria di Porto di Fano, prescrive:

> È vietato:
>
> - giocare a pallone e ad altri giochi che possano causare molestia o danno alle altre persone;
> - spogliarsi e depositare il vestiario in spiaggia.

Come va interpretata questa norma? In base all'articolo 12 delle Disposizioni sulla legge in generale del CC e alla sua forma può essere concepita come due divieti: il primo che vieta il gioco del pallone e altri giochi "molesti", e il secondo che vieta di spogliarsi e di depositare gli indumenti in spiaggia.

Vediamo come si può formalizzare tale norma. Il primo passo è quello di analizzare la nozione di vietato come un operatore che si applica all'intero enunciato, quindi:

> Vietato(giocare a pallone e ad altri giochi che possano causare molestia o danno alle altre persone).

L'enunciato "giocare a pallone e ad altri giochi che possano causare molestia o danno alle altre persone" non è atomico data la presenza della congiunzione "e", e pertanto deve venire interpretato come la congiunzione di "giocare a pallone" e di "giocare ad altri giochi che possono causare molestia o danno alle altre persone". La prima di queste congiunzioni è atomica e la concepiamo come la realizzazione della lettera proposizionale p, la seconda contiene una disgiunzione e può venire parafrasata come segue

> giocare a un gioco che può causare molestia ad altre persone o
> giocare a un gioco che può causare un danno ad altre persone

dove le due parti della disgiunzione sono atomiche[36], e le prendiamo, rispettivamente, come realizzazione delle lettere proposizionali q e r. In base

[36]Questi enunciati, così come il precedente, possono venire analizzati ulteriormente una volta che passiamo da una interpretazione proposizionale ad una predicativa, ma per i presenti scopi l'interpretazione proposizionale è sufficiente.

all'assegnamento appena fatto, il primo divieto è espresso formalmente come

$$\text{Vietato}(p \wedge (q \vee r)) \tag{1.8}$$

Ora, se qualche cosa è vietata, significa che non è permessa, ma se non è permessa è obbligatorio che non si dia il caso che quella tal cosa; pertanto 1.8 diviene

$$O\neg(p \wedge (q \vee r)) \tag{1.9}$$

e, in base a elementari principi logici,

$$O(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \tag{1.10}$$

Ma l'obbligo non si distribuisce rispetto a una disgiunzione, come mostra il seguente contro-esempio: supponiamo di essere a un incrocio a T e che entrambe le strade siano dei sensi unici; in questo caso avremo l'obbligo disgiuntivo o di girare a destra o di girare a sinistra, ma non l'obbligo di girare a destra né quello di girare a sinistra, o meglio non il divieto di girare a destra né quello di girare a sinistra, altrimenti violeremmo in ogni caso la norma.

In base all'interpretazione appena fatto la norma espressa da 1.8, in assenza di altre norme, non implica il divieto di giocare a pallone e il divieto di giocare ad altri giochi "molesti", quindi questa norma viene violata unicamente da quei virtuosi che giocano a pallone e ad almeno un altro gioco "molesto" contemporaneamente. Un'analisi simile può essere offerta anche per la seconda parte dell'ordinanza. Molto probabilmente la formulazione della norma tradisce l'intenzione dell'autorità emanatrice; ma, in mancanza di altri fattori, l'intenzione deve essere ricavata dalla forma delle norme: infatti, nel caso appena preso in esame, abbiamo ritenuto opportuno considerare la norma come una lista di divieti invece di un singolo divieto in base alla divisione in due parti della norma stessa.

Schema del presente lavoro

In questo capitolo abbiamo esposto le motivazioni per cui riteniamo che lo studio della logica ed in particolare della logica modale (enfatizzando inoltre l'importanza dello sviluppo di adeguate metodologie deduttive) risultino rilevanti per lo studio dell'informatica giuridica e la filosofia del diritto. Nel capitolo 2 presenteremo i concetti e risultati basilari della logica modale. Nel successivo capitolo 3 presenteremo un sistema di deduzione per logiche modali e multi-modali basato su una combinazione di regole dei tableaux e di deduzione naturale esteso con un formalismo di indici che consente di combinare in variamente logiche tra loro, fornendo così uno strumento flessibile e sensibile al fenomeno che si vuole trattare con la loro combinazione; il capitolo si chiude confrontando il sistema ivi presentato e gli usuali sistemi tableaux. Nel capitolo 4 mostreremo come il sistema sviluppato in questo lavoro può essere adattato a particolari tipi di ragionamenti normativi e infine discuteremo alcuni possibili sviluppi.

CAPITOLO 2

Logica modale

2.1 Introduzione

La logica modale nasce contemporaneamente alla logica della tradizione occidentale e, come questa, discende da Aristotele, che per primo ne fornì una trattazione con la sua teoria del sillogismo modale e diede una definizione di necessario come "ciò che è e non può non essere".

Le dispute intorno alla concezione delle modalità si sono susseguite, in ambito filosofico, fin dall'antichità portando a teorie modali estremamente complesse durante il medioevo, senza mai sostanzialmente staccarsi, dal punto di vista deduttivo formale, dalla trattazione sillogistica aristotelica. Un nuovo impulso allo sviluppo della logica modale fu dato da Leibniz con l'osservazione delle analogie tra la teoria della quantificazione, nella forma del quadrato delle opposizioni, e i concetti modali, osservazione che suggerì l'identificazione, almeno in parte tuttora valida, di necessario, possibile, impossibile e contingente rispettivamente con l'universale affermativa, la particolare affermativa, l'universale negativa e la particolare negativa.

Leibniz poneva alla base di tali analogie il suo concetto di "mondi possibili" come singole entità individuali e la definizione, ad esso connessa, di necessario come "ciò che è vero in ogni mondo possibile".

Un passo decisivo verso la sistemazione sintattica attuale delle logiche modali fu fornito dallo sviluppo dei sistemi logistici da parte di Frege e dai problemi sollevati dalla sostituzione degli equivalenti nei contesti opachi o indiretti (contesti di credenza, conoscenza e necessità), che riguardano direttamente le logiche modali nella loro concezione più ampia.

Un problema che emerge dai sistemi logistici, benchè noto e trattato sin dall'antichità, riguarda l'interpretazione del condizionale e i conseguenti paradossi dell'implicazione materiale, per la cui soluzione Lewis, nella prima metà di questo secolo, propose la sostituzione dell'implicazione materiale con l'implicazione stretta[1], costruendo dei sistemi logistici per tale connettivo (da qui i famosi sistemi $S1 - S5$.[2] Come è noto, i sistemi di Lewis contengono il calcolo proposizionale classico, ma non sono costruiti a partire da esso. L'idea di costruire una logica modale come estensione di un calcolo proposizionale è di Gödel (1933) che costruì un sistema equivalente a $S4$ partendo da una base proposizionale e aggiungendovi particolari assiomi e una specifica regola d'inferenza (la necessitazione). Successivamente, Lemmon (1957) costruì sistemi basati sul calcolo proposizionale e su particolari regole d'inferenza che sono equivalenti ai sistemi di Lewis. Moltissimi altri sistemi sono stati poi sviluppati dal punto di vista sintattico.

Rimaneva comunque il problema di formulare una semantica adeguata per tali sistemi. Qui ci limiteremo ad evidenziare due differenti tradizioni semantiche: quella algebrica e quella della teoria dei modelli. La prima, ispirata alle algebre booleane e sviluppatasi, sulla scia di Łukasiewicz, grazie ai lavori di Tarski, McKinsey e Jónsson[3], è rimasta, almeno fino a tempi recenti, abbastanza marginale[4]. Pertanto il "boom" delle semantiche per le logiche modali è dovuto soprattutto all'opera di Kripke[5] che si ispira all'idea leibniziana di mondo possibile. Nella stessa scia si inseriscono i lavori precedenti di Carnap[6], con la sua teoria delle descrizioni di stato e dei concetti di vero e logicamente vero, e quelli più o meno contemporanei di Kanger[7], di Prior[8], con la concezione temporale delle modalità, di Hintikka[9] con i suoi insiemi modello e la relazione di alternatività, e di Von Wright con lo sviluppo delle logiche deontiche[10] e la sua concezione "liberale" delle modalità[11]. La tradizione sintattica, che prende origine da Lewis, e le due diverse (ma unificabili[12]) tradizioni semantiche sono all'origine della vasta panoramica di

[1](Lewis 1918)

[2](Lewis and Langford 1932 2°ed. 1959)

[3](McKinsey 1941, McKinsey 1945, McKinsey and Tarski 1944, McKinsey and Tarski 1948, Jónsson and Tarski 1951).

[4]cfr. (Bull and Segerberg 1984) p.10

[5](Kripke 1959, Kripke 1963, Kripke 1965)

[6](Carnap 1976)

[7](Kanger 1957a, Kanger 1957b, Kanger 1957c, Kanger 1971)

[8](Prior 1957)

[9](Hintikka 1957, Hintikka 1963, Hintikka 1967)

[10](von Wrigth 1951a)

[11](von Wrigth 1951b)

[12]A tale proposito si vedano (Goldblatt 1976, Goldblatt 1977, Bull and Segerberg 1984).

logiche modali oggi esistenti.

2.2 Le logiche modali

Per "logiche modali" intendiamo le logiche in cui sono presenti gli operatori di necessità e di possibilità o operatori che esibiscono un comportamento analogo (deontici, epistemici, quantificazionali[13]. . .) o operatori non vero-funzionali o intensionali[14]. Un motivo immediato per l'uso del plurale discende direttamente dall'interpretazione che viene associata a tali operatori e dal fatto che essi siano o no interdefinibili. Ad esempio, interpretando "necessario" come "obbligatorio", un ovvio principio, come quello espresso dalla formula $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ (se qualcosa è necessario allora è) non risulta più valido (se qualcosa è obbligatorio allora viene fatto, risulta ovviamente falso nel mondo attuale). Per ovviare agli inconvenienti dei cosiddetti paradossi dell'interpretazione sono stati costruiti sistemi modali che differeriscono per le loro caratteristiche sintattiche[15].

Se le modalità venivano tradizionalmente interpretate come interdefinibili, non è detto che questa sia l'unica interpretazione possibile; infatti, sono stati proposti sistemi modali senza tale interdefinibilità[16] e sistemi con più operatori di necessità e di possibilità corrispondenti a diverse concezioni delle modalità (sistemi multi-modali), ad esempio: sistemi deontico-temporali[17] — con interazioni tra modalità logiche e modalità temporali[18]—, sistemi aletico-deontici — con interazioni tra modalità deontiche e modalità logiche[19] —, sistemi con più modalità epistemiche[20] e così via.

Vogliamo inoltre menzionare le cosiddette logiche dinamiche[21] che consistono in una generalizzazione della logica modale a logiche dell'azione, o più precisamente a logiche di processi; infatti ogni azione o processo p dà origine a una classe di modalità $[p]A$ e $\langle p\rangle A$, interpretate rispettivamente come: A si

[13]cfr. (Montague 1974, von Wrigth 1951b).

[14]Vedi (Gabbay 1976, Gabbay 1994)

[15]Per una panoramica dei sistemi modali vedi (Lemmon 1957, Hughes and Cresswell 1968, Hughes and Cresswell 1984, Segerberg 1971, Chellas 1980, Fitting 1983).

[16](Hughes and Cresswell 1968) pp. 345–347; (Prior 1957) pp. 41–54.

[17](Chellas 1980, Thomason 1981, von Wrigth 1983, van Eck 1981).

[18](Thomason 1984)

[19](Kanger 1971, Anderson 1958).

[20]Si veda per esempio (Halpern and Moses 1992).

[21]Testi introduttivi alle logiche dinamiche sono (Harel 1984, Goldblatt 1992).

verifica dopo ogni esecuzione del processo p e A si verifica dopo qualche esecuzione del processo A. Le logiche dinamiche si sono rilevate particolarmente feconde in applicazioni di tipo deontico/normativo[22].

Un ultimo punto che merita di essere citato riguarda la costruzione delle logiche modali a partire da altri calcoli. Benchè le logiche modali "standard" si basino sul calcolo proposizionale classico, sono possibili logiche modali ottenute come estensioni del calcolo intuizionista[23], di logiche substrutturali[24] o di logiche polivalenti[25], o come una combinazione di queste[26].

2.3 Preliminari

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio costituito da:

1. un insieme numerabile di lettere proposizionali;
2. i connettivi logici $\neg$ (non), $\rightarrow$ (se … allora $\cdots$), $\wedge$ (e), $\vee$ (o inclusivo), $\equiv$ (se e solo se);
3. parentesi), (.

Per le estensioni modali di $\mathcal{L}$ avremo inoltre:

4. gli operatori modali $\Box$ (necessario) e $\Diamond$ (possibile)[27].

Sia FBF l'insieme delle formule ben formate di $\mathcal{L}$ così definito:

1. se p è una lettera proposizionale allora $p \in$ FBF;
2. se $A \in$ FBF allora $\neg A \in$ FBF;
3. se $A, B \in$ FBF allora $A \rightarrow B \in$ FBF;
4. se $A, B \in$ FBF allora $A \wedge B \in$ FBF;

[22] Esempi di applicazioni di logiche dinamiche al ragionamento deontico/normativo sono (Meyer 1987, Meyer 1988, Dignum, Meyer and Wieringa 1994, Royakkers and Dignum 1994).

[23] (Fitch 1948, Prawitz 1965, Fisher-Servi 1981, Simpson 1994, Gabbay 1996a)

[24] (Cha 1993, D'Agostino, Gabbay and Russo 1996)

[25] (Prior 1957, Segerberg 1967, Osterman 1988, Morikawa 1989, Ginsberg 1990)

[26] (Gabbay 1996c)

[27] La presenza di entrambi gli operatori modali è ridondante in quanto assumeremo, come di consueto, la loro interdefinabilità.

5. se $A, B \in$ FBF allora $A \vee B \in$ FBF;
6. se $A, B \in$ FBF allora $A \equiv B \in$ FBF.

Per le estensioni modali di $\mathcal{L}$ avremo inoltre:

7. se $A \in$ FBF allora $\Box A \in$ FBF;
8. se $A \in$ FBF allora $\Diamond A \in$ FBF.

Definizione 2.1.

$$\Box^0 A = A, \Box^n A = \Box\Box^{n-1} A$$

Assumiamo il seguente insieme $\mathcal{A}$ di schemi di assiomi per il calcolo proposizionale classico[28] (PC)

A1) $A \to (B \to A)$

A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

dove $\to$ e $\neg$ sono gli unici connettivi primitivi. I rimanenti connettivi sono introdotti per definizione:

$$\begin{aligned} A \wedge B &=_{df} \neg(A \to \neg B) \\ A \vee B &=_{df} \neg A \to B \\ A \equiv B &=_{df} (A \to B) \wedge (B \to A) \end{aligned}$$

Assumiamo come unica regola d'inferenza il Modus Ponens:

$$\frac{A \to B, A}{B} \tag{MP}$$

Definizione 2.2. Una deduzione in PC è una sequenza finita di formule $B_0, B_1, \ldots B_n$, tale che per ogni $B_i, 0 \leq i \leq n$, o $B_i \in \mathcal{A}$, o B_i è ottenuta da formule precedenti $B_j, B_k, j, k < i$, mediante MP.

Una deduzione di A da un insieme di formule $\mathcal{D}$ in PC una sequenza finita di formule $B_0, B_1, \ldots, B_n$, tale che $A = B_n$ e per ogni $B_i, 0 \leq i \leq n$, o $B_i \in \mathcal{A}$, o $B_i \in \mathcal{D}$ o B_i è ottenuta da formule precedenti $B_j, B_k, j, k < i$, mediante MP.

[28] L'assiomatizzazione qui utilizzata è quella esposta in (Mendelson 1972).

Per questo sistema è possibile dimostrare il seguente

TEOREMA 2.1. *(Teorema di deduzione) Se* D *è un insieme di fbf e* $A, B \in$ *FBF* $D, A \vdash B \iff D \vdash A \rightarrow B$[29].

L'assiomatizzazione qui proposta non è la sola[30], così come la logica proposizionale classica non è l'unica logica proposizionale[31].

2.4 Le logiche modali

Considereremo le logiche modali come estensioni di calcoli proposizionali ottenute mediante l'aggiunta di assiomi e regole di inferenza o regole deduttive. Forniamo una lista di alcuni degli assiomi modali più noti.

K $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

D $\Box A \rightarrow \Diamond A$

T $\Box A \rightarrow A$

4 $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

B $A \rightarrow \Box\Diamond A$

5 $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

W $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

G $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

$\mathbf{G}^{(k,l,m,n)}$ $\Diamond^k\Box^l A \rightarrow \Box^m\Diamond^n A$ con k, l, m, n che appartengono ai naturali.

M. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$

H $(\Diamond A \wedge B) \rightarrow (\Diamond(A \wedge B) \vee (A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond(B \wedge \Diamond A))$

Ban $A \equiv \Box A$

V $\Box A$

[29] Per la dimostrazione vedi (MENDELSON 1972) pp. 46–47.

[30] Per altre assiomatizzazioni vedi (MENDELSON 1972).

[31] Per una panoramica dei vari tipi di logica proposizionale con discussione delle loro varie motivazioni vedi ed esempio (WÓJCICKI 1989, EPSTEIN 1990).

L'assioma $\mathbf{G}^{(k,l,m,n)}$ costituisce una generalizzazione di vari assiomi a seconda dei valori che si attribuiscono a k, l, m, n (così, per esempio, $\mathbf{G}^{(0,1,0,0)} = \mathbf{T}$, $\mathbf{G}^{(1,0,1,1)} = \mathbf{E}$, $\mathbf{G}^{(0,0,1,1)} = \mathbf{B}$.[32])

Le regole di inferenza che introduciamo per la logica modale sono la regola di regolarità:

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B} \tag{RR}$$

e la necessitazione:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A} \tag{Nec}$$

Definizione 2.3. Chiameremo *regolari* i sistemi che contengono K, sono chiusi rispetto alla sostituzione uniforme (SU) e hanno come regola d'inferenza RR, e *normali* i sistemi che contengono K e sono chiusi rispetto a SU, Modus Ponens e Necessitazione.

Ogni sistema normale è regolare, in quanto RR è derivabile dalla Necessitazione:

1. $A \to B$	Ipotesi
2. $\Box(A \to B)$	1 Nec
3. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	**K**
4. $\Box A \to \Box B$	2, 3 MP

Com'è noto, le varie combinazioni di assiomi determinano sistemi modali distinti. Seguendo Lemmon identificheremo i sistemi modali in base ai nomi dei loro assiomi. Se $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ sono gli assiomi che caratterizzano il sistema, il sistema sarà chiamato $CX_1 \cdots X_n$, se è regolare, $KX_1 \cdots X_n$ se è normale. Forniamo una lista di alcune abbreviazioni per i sistemi modali più comuni nella letteratura.

- $KT = T$ noto anche come M
- $KT4 = S4$
- $KT4B = KT45 = S5$
- $KD = T$ deontico

[32] Il vantaggio di questa formulazione è principalmente semantico, in quanto ci permette di includere in una unica classe le relazioni che corrispondono ai vari assiomi, cfr. (Chellas 1980, Hughes and Cresswell 1984).

- $KD4 = S4$ deontico
- $KD45 = S5$ deontico
- $KTB = B$, il sistema brouweriano
- $K4W = KW = GL$, il sistema di Gödel-Löb
- $KT4M = S4.1$
- $KT4G = S4.2$
- $KT4H = S4.3$
- $KBan = KT4BM = PC$ il sistema banale Ban
- KV=il sistema $Verum$

Mostriamo, a titolo di esempio, come **B** sia derivabile in $KT45$ e **5** sia derivabile in $KT4B$.

$\vdash_{KT4E} A \rightarrow \Diamond\Box A$

1. $\Box A \rightarrow A$	**T**
2. $\Box\Box A \rightarrow \Box A$	1 SU $\Box A/A$
3. $A \rightarrow \Diamond A$	2 PC e def $\Diamond$
4. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	**E**
5. $(A \rightarrow \Diamond A) \rightarrow ((\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A) \rightarrow (A \rightarrow \Diamond\Box A))$	Tautologia
6. $A \rightarrow \Diamond\Box A$	$3, 4, 5$ 2 MP

$\vdash_{KT4B} \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

1. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$	**4**
2. $\Box\neg A \rightarrow \Box\Box\neg A$	1 SU $\neg A/A$
3. $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$	2 PC e def $\Diamond$
4. $A \rightarrow \Box\Diamond A$	**B**
5. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond\Diamond A$	4 SU $\Diamond A/A$
6. $A \rightarrow \Diamond A$	duale di **T**
7. $\Diamond A \rightarrow \Diamond\Diamond A$	6 SU $\Diamond A/A$
8. $\Diamond A \equiv \Diamond\Diamond A$	$3, 7$ PC e def $\equiv$
9. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	5 SE $\Diamond\Diamond A/\Diamond A$

Mostriamo, allo stesso modo, come **Ban** sia dimostrabile in $KT4BM$

$\vdash_{KT4BM} A \rightarrow \Box A$

1. $A \rightarrow \Diamond A$	duale di **T**
2. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$	**5**
3. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$	**M**
4. $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$	duale di **5**
5. $A \rightarrow \Box A$	$1, 2, 3, 4$ PC

Mostriamo inoltre come in $KBan$ ogni formula modale collassi nella parte proposizionale della formula stessa

$\vdash_{KBan} A \equiv \Diamond A$

1. $(\Box A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \Box A)$	**Ban** def $\equiv$
2. $A \rightarrow \Box A$	1 PC
3. $\neg\Box\neg A \rightarrow \neg\neg A$	2 PC SU$\neg A/A$
4. $\Diamond A \rightarrow A$	3 def $\Diamond$

Pertanto in Ban otteniamo gli assiomi **T**, **B**, **4**, **5**, **M** tramite ripetute applicazioni della regola di sostituzione degli equivalenti (SE) a $A \rightarrow A$.[33]

2.5 Semantica a mondi possibili

Il problema di formulare una semantica per i sistemi modali presentati nel precedente capitolo viene risolto con la così detta "semantica a mondi possibili", che si è dimostrata uno strumento di analisi estremamente potente e flessibile[34] soprattutto dal punto di vista filosofico; infatti le semantiche algebriche risultano estremamente utili nell'indagine di proprietà matematiche delle logiche[35], ma, data la mancanza di interpretazione rispetto fenomeni non puramente matematici, non ci consentono indagini in altri campi.

[33]Per una discussione di un maggior numero di logiche modali e delle loro relazioni sintattiche vedi (Goré, Heuerding and Heinle 1995).

[34]Ricordiamo che la semantica a mondi possibili non è l'unica semantica che è stata proposta per le logiche modali; ad esempio, sono state proposte semantiche ad intorni (Neighborhood Semantic) vedi (Segerberg 1971), e semantiche algebriche che prendono lo spunto dai lavori di McKinsey, Tarski, Jónsson (vedi sezione 2.1). Questi tre tipi di semantica sono in stretta connessione tra di loro. Cfr. (Goldblatt 1976, Goldblatt 1977, Bull and Segerberg 1984).

[35]Si vedano (Kracht 1996, Zakharyaschev, Wolter and Chagrov 1996).

Il concetto fondamentale delle semantiche a mondi possibili è quello di "modelli di Kripke": triple ordinate $\langle W, R, v\rangle$ dove W è un insieme non vuoto di elementi che chiameremo "mondi possibili" (o semplicemente mondi), R è una arbitraria relazione binaria definita su W, detta relazione di accessibilità o di alternanza, e v è una funzione di valutazione da FBF $\times\, W \mapsto \{T, F\}$ definita nel seguente modo:

- $v : \mathrm{FBF} \times W \mapsto \{T, F\}$

    1. $v(\alpha, w) = T \iff v(\neg\alpha, w) = F$
    2. $v(\neg\alpha, w) = T \iff v(\alpha, w) = F$
    3. $v(\alpha \to \beta, w) = T \iff v(\alpha, w) = F$ o $v(\beta, w) = T$
    4. $v(\Box\alpha, w) = T \iff \forall x \in W : wRx, v(\alpha, x) = T$
    5. $v(\alpha, W) = T \iff \forall w \in W v(\alpha, w) = T.$

Come è noto è possibile definire diverse logiche in base alle proprietà formali di R. In generale, una relazione in W^2 è:

- seriale se $\forall x \exists y(xRy)$;
- riflessiva se $\forall x(xRx)$;
- irriflessiva se $\forall x \neg xRx$;
- transitiva se $\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \to xRz)$;
- simmetrica se $\forall x, y(xRy \to yRx)$;
- euclidea se $\forall x, y, z(xRy \wedge xRz \to yRz \wedge zRy)$;
- una relazione di equivalenza, se è riflessiva, transitiva e simmetrica, o seriale, transitiva ed euclidea;
- banale se $\forall x, y(xRy \to x = y)$;
- atomica se $\forall x, y, z(xRy \wedge xRz \to y = z)$;
- convergente se $\forall x, y, w(xRy \wedge xRw \to \exists z(yRz \wedge wRz))$;
- connessa se $\forall x, y, z(xRy \wedge xRz \to yRz \vee zRy)$.

In base alla definizione della valutazione in funzione di R, si possono stabilire facilmente i rapporti che intercorrono tra gli assiomi caratteristici dei vari sistemi modali e le condizioni corrispondenti sulla relazione di accessibilità R:

K nessuna condizione

D R seriale

T R riflessiva

B R simmetrica

$S4$ R riflessiva e transitiva

$S5$ R relazione di equivalenza

Ban R banale

GL R è una catena finita irriflessiva e transitiva

$Verum$ R impone che ogni mondo sia un punto terminale[36]

$S4.1$ R riflessiva transitiva e atomica

$S4.2$ R riflessiva transitiva e convergente

$S4.3$ R riflessiva transitiva e connessa

Pertanto, è possibile mostrare, con una ovvia applicazione delle clausole della definizione della funzione di valutazione, che ogni assioma è corretto rispetto alla classe di modelli che soddisfano la corrispondente condizione sulla relazione di accessibilità. Lo stesso vale per le regole d'inferenza, con la conseguente dimostrazione di correttezza per i sistemi elencati.

2.5.1 Modelli canonici

Un modello è determinato quando specifichiamo:

1. i mondi che appartengono a W

[36] Un punto terminale è un mondo che non è in relazione di accessibilità con nessun altro, neppure con se stesso.

2. le coppie di mondi che appartengono alla relazione R

3. le condizioni sulla funzione di valutazione.

Definizione 2.4. Una formula α è vera in un mondo w ($w \models_L \alpha$) sse $v(\alpha, w) = T$.

Una formula α è valida in un modello ($M \models_L \alpha$) sse è vera in tutti i mondi del modello.

Una formula α è valida rispetto a una classe di modelli ($C \models_L \alpha$) sse è valida in tutti i modelli appartenenti a tale classe.

Definizione 2.5. Una Logica L è completa rispetto a una classe di modelli $\mathcal{C}$ sse $\forall \alpha \in$ FBF tale che $\models_L \alpha$ esiste un modello $\langle W, R, v \rangle$ appartenente a $\mathcal{C}$ tale $v(\alpha, w) = T$.

Definizione 2.6. Una formula α è consistente rispetto ad una logica L (α è L-consistente) sse $\nvdash_L \neg\alpha$.

Un insieme di formule è L-consistente sse non esiste un suo sottoinsieme finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tale che $\vdash_L \neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$.

Definizione 2.7. Un insieme D di fbf è massimale sse $\forall\alpha$, o $\alpha \in \mathsf{D}$ o $\neg\alpha \in \mathsf{D}$.

Un insieme e consistente massimale sse è consistente ed è massimale.

Lemma 2.2. *Sia D un insieme L-consistente massimale. Le seguenti sono proprietà degli insiemi L-consistenti massimali:*

1. *$\forall\alpha \in FBF$ un solo elemento di $\{\alpha, \neg\alpha\}$ appartiene a D;*

2. *$\alpha \vee \beta \in \mathsf{D} \iff$ o $\alpha \in \mathsf{D}$ o $\beta \in \mathsf{D}$;*

3. *$\alpha \wedge \beta \in \mathsf{D} \iff \alpha, \beta \in \mathsf{D}$;*

4. *$\alpha \rightarrow \beta \in \mathsf{D} \iff$ o $\neg\alpha \in \mathsf{D}$ o $\beta \in \mathsf{D}$;*

5. *se $\vdash_L \alpha$ allora $\alpha \in \mathsf{D}$;*

6. *se $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \in \mathsf{D}$ allora $\beta \in \mathsf{D}$*[37].

Lemma 2.3. *(Lemma di Lindembaum) Ogni insieme L-consistente può essere esteso a un insieme L-consistente massimale.*

[37] Per la dimostrazione si veda (Hughes and Cresswell 1984), trad. it. pp. 17–18.

Definizione 2.8.

$$\mathsf{L}^{\Box}(\mathsf{D}) = \{\alpha : \Box\alpha \in \mathsf{D}\}$$

LEMMA 2.4. *(Lemma di Makinson) Per ogni logica normale L e ogni insieme D L-consistente contenente una formula $\neg\alpha$, l'insieme $\mathsf{L}^{\Box}(\mathsf{D}) \cup \{\neg\alpha\}$ è L-consistente.*

Dimostrazione. Dimostriamo la conversa. Supponiamo che $\mathsf{L}^{\Box}(\mathsf{D}) \cup \{\neg\alpha\}$ non sia L-consistente. Esisterà allora un sottoinsieme finito $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ di $\mathsf{L}^{\Box}(\mathsf{D})$ tale che:

$$\vdash_L \neg(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha)$$

quindi per PC

$$\vdash_L (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \to \alpha$$

da cui con una applicazione di RR otteniamo

$$\vdash_L \Box(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \to \Box\alpha$$

e per SE $\Box(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n)/(\Box\beta_1 \wedge \cdots \wedge \Box\beta_n)$

$$\vdash_L (\Box\beta_1 \wedge \cdots \wedge \Box\beta_n) \to \Box\alpha$$

e infine per PC

$$\vdash_L \neg(\Box\beta_1 \wedge \cdots \wedge \Box\beta_n \wedge \neg\Box\alpha)$$

L'insieme $\{\beta_1, \ldots, \beta_n, \neg\Box\alpha\}$ non è L-consistente ed è un sottoinsieme di D, pertanto D non è L-consistente. □

COROLLARIO 2.5. *Per ogni logica normale L e ogni insieme D L-consistente contenente una formula $\Diamond\alpha$, $\mathsf{L}^{\Box}(\mathsf{D}) \cup \{\alpha\}$ è L-consistente.*

Dopo questi preliminari siamo pronti a fornire la definizione di modello canonico:

Definizione 2.9. Un modello canonico per una logica L è una tripla ordinata $\langle W, R, v\rangle$ tale che

1. $W = \{w : w$ è un insieme L consistente massimale$\}$;

2. $\forall w, x \in W, wRx \iff \mathsf{L}^{\Box}(w) \subseteq x$;

3. v è definita nel seguente modo:

a. $\forall p$, dove p è una lettera proposizionale, $\forall w \in W, p \in w \iff v(p, w) = T$

b. $v(\alpha, w) = T \iff v(\neg\alpha, w) = F$

c. $v(\neg\alpha, w) = T \iff v(\alpha, w) = F$

d. $v(\alpha \to \beta, w) = T \iff v(\alpha, w) = F$ o $v(\beta, w) = T$

e. $v(\Box\alpha, w) = T \iff \forall x \in W : wRx, v(\alpha, x) = T$.

Queste condizioni determinano in maniera completa un modello per una logica L soddisfacendo i requisiti richiesti a una tripla ordinata $\langle W, R, v\rangle$ per essere un modello di Kripke.

TEOREMA 2.6. *Sia $M = \langle W, R, v\rangle$ il modello canonico per L normale. Allora $\forall\alpha \in FBF, \forall w \in W, v(\alpha, w) = T \iff \alpha \in w$.*

Dimostrazione. Dimostreremo il teorema per induzione sulla lunghezza della formula.
Per $n = 0$.
α è una lettera proposizionale, quindi il teorema è dimostrato per la clausola 3a. della definizione di modello canonico.
Per $n > 0$.
Distinguiamo tre casi:

1. $\alpha = \neg\beta$

2. $\alpha = \beta \to \gamma$

3. $\alpha = \Box\beta$

Caso 1.
Dalle clausole 3b. e 3c. avremo

$$v(\beta, w) = T \iff v(\neg\beta, w) = F \tag{2.1}$$

$$v(\neg\beta, w) = T \iff v(\beta, w) = F \tag{2.2}$$

con β che ricade sotto l'ipotesi induttiva, e quindi, supponendo che $\beta \in w$,

$$\beta \in w \iff v(\beta, w) = T \tag{2.3}$$

ma

$$\beta \in w \iff \neg\beta \notin w \tag{2.4}$$

dunque da 2.1, 2.3 e 2.4 otteniamo

$$v(\neg\beta, w) = F \iff \neg\beta \notin w \ .$$

Analogamente, supponendo che $\neg\beta \in w$, da 2.2, 2.3 e 2.4 sostituendo $\neg\beta$ a β nelle ultime due otteniamo

$$v(\neg\beta, w) = T \iff \neg\beta \in w \ .$$

Caso 2.
Per la clausola 3d. della funzione di valutazione abbiamo

$$v(\beta \to \gamma, w) = T \iff \text{ o } v(\beta, w) = F \text{ o } v(\gamma, w) = T \ ;$$

dalla proprietà 4. degli insiemi massimali (lemma 2.2) e dall'ipotesi induttiva otteniamo pertanto

$$v(\beta \to \gamma, w) = T \iff (\beta \to \gamma) \in w \, .$$

Caso 3.
Supponiamo che $\Box\beta \in w$. Dalla definizione di R avremo:

$$\forall x, wRx\beta \in x$$

e dall'ipotesi induttiva e dalla clausola 3.e della funzione di valutazione

$$v(\Box\beta, w) = T \iff \Box\beta \in w \, .$$

Supponiamo che $\Box\beta \notin w$; allora dalla massimalità di w seguirà $\Box\beta \in w$, e quindi per il lemma 2.4 $\mathsf{L}^{\Box}(w) \cup \{\Box\beta\}$ è L-consistente.
Per il lemma di Lindembaum esiste un $x \in W$ tale che $\mathsf{L}^{\Box}(w) \cup \{\Box\beta\} \subseteq w$; quindi

a. $\mathsf{L}^{\Box}(w) \subseteq x$;

b. $\Box\beta \in x$.

Il punto a. comporta che wRx, per la definizione di R. Dall'ipotesi induttiva, dal punto 1. del teorema e dal punto b. sopra consegue che $v(\beta, x) = F$, e quindi

$$v(\beta, w) = F \iff \beta \notin w$$

□

Corollario 2.7. *Sia M il modello canonico per L; allora*

$$M \models_L \alpha \iff \vdash_L \alpha$$

Dimostrazione $\Leftarrow$. Se $\vdash_L \alpha$ per il lemma 2.2 α appartiene a ogni mondo di W, quindi per il teorema 2.6 e la definizione di validità in un modello $M \models_L \alpha$. □

Dimostrazione $\Rightarrow$. Supponiamo che $\nvdash_L \alpha$; quindi $\neg\alpha$ è L-consistente; allora per qualche $w \in W$ $\neg\alpha \in w$, dunque $v(\alpha, w) = F$ e pertanto $M \not\models_L \alpha$ □

Dato questo corollario, per dimostrare la completezza di una logica modale dobbiamo mostrare che la relazione nel modello canonico per il sistema in questione soddisfa determinate condizioni[38].

Diciamo che una logica L è canonica quando la struttura del modello canonico per L è una struttura per L. Si vede facilmente che ogni logica canonica è completa, ma non viceversa (GL, ad esempio, non è canonica ma è completa[39]).

A titolo di esempio, dimostriamo la completezza di $KG^{(k,l,m,n)}$, da cui, come abbiamo visto, si ricavano la maggior parte delle logiche elencate in questo capitolo.

Definizione 2.10.

$$wR_nw_n \iff wRw_1, w_1Rw_2, \ldots, w_{n-1}Rw_n$$

$$\mathsf{L}^{\Box}(w)^n = \{\alpha : \Box^n\alpha \in w\}$$

Lemma 2.8. $wR_nw_n \iff \mathsf{L}^{\Box}(w)^n \subseteq w_n$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n, e la base è la definizione di R nei modelli canonici. □

[38] Condizioni sulla relazione di accessibilità per vari sistemi sono esposte all'inizio del presente capitolo.

[39] Vedi ad esempio (Boolos 1979, Hughes and Cresswell 1984).

Teorema 2.9. *$KG^{(k,l,m,n)}$ è completa rispetto alla classe dei modelli in cui R soddisfa la seguente condizione:*

$$\forall w, x, y \in W(wR_k x \wedge wR_m y) \rightarrow z \in W(xR_l z \wedge yR_n z)$$

Dimostrazione. Assumiamo che valga $\forall w, x, y \in W(wR_k x \wedge wR_m y)$. Dobbiamo dimostrare che $\mathsf{L}^{\Box}(x)^l \cup \mathsf{L}^{\Box}(y)^n$ è $KG^{(k,l,m,n)}$-consistente; infatti se lo fosse potrebbe essere esteso a un insieme $KG^{(k,l,m,n)}$-consistente massimale z tale che:

- $\mathsf{L}^{\Box}(x)^l \subseteq z$
- $\mathsf{L}^{\Box}(y)^n \subseteq z$

dando così il risultato desiderato.

Supponiamo dunque che non sia $KG^{(k,l,m,n)}$-consistente; allora per qualche formula $\Box^l \alpha_i \in x$ e $\Box^n \beta_j \in y$

$$\vdash_{KG^{(k,l,m,n)}} \neg(\alpha_i \wedge \beta_j)$$

Per PC abbiamo

$$\vdash_{KG^{(k,l,m,n)}} \alpha_i \rightarrow \neg\beta_j$$

Con n applicazioni di Necessitazione, RR e interdefinibilità degli operatori modali otteniamo

$$\vdash_{KG^{(k,l,m,n)}} \Diamond^n \alpha_i \rightarrow \neg\Box^n \beta_j \ .$$

Dato che $\Box^l \alpha_i \in x$, avremo $\Diamond^k \Box^l \alpha_i \in w$ e quindi $\Box^m \Diamond^n \alpha_i \in w$ da cui $\Diamond^n \alpha_i \in y$; risulta infine che $\neg\Box^n \beta_j \in y$ contrariamente alla consistenza di quest'ultimo. Pertanto è $KG^{(k,l,m,n)}$-consistente. $\Box$

Ci apprestiamo ora a dimostrare un teorema, che utilizzeremo in seguito, per la cui enunciazione e dimostrazione ci serviranno le seguenti definizioni:

Definizione 2.11. Due mondi w_i, w_k si dicono distinguibili se esiste una fbf α tale che $v(\alpha, w_i) \neq v(\alpha, w_k)$.

Un modello si dice distinguibile quando per ogni coppia di mondi $w_i, w_k \in W$, w_i è distinguibile da w_k.

Teorema 2.10. *Sia dato un qualunque modello $M = \langle W, R, v \rangle$ e sia $M' = \langle W', R', v' \rangle$ il modello distinguibile di M costruito nel seguente modo:*

- $W' = \{[w] : w_i \in W, w \approx w_i \iff \forall \alpha v(\alpha, w) = v(\alpha, w_i)\}$
- $\forall w, w_i \in W, wR'w_i \iff w_k \in [w_i], wRw_k$
- $v'(p, [w]) = v(p, w)$ *e* $w \in [w]$;

allora $\models_M \alpha \iff \models_{M'} \alpha$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sulla lunghezza della formula, omettendo i casi dei connettivi proposizionali. Supponiamo che $v(\alpha, w) = F$; allora

$$v(\alpha, w) = F \iff w_i, wRw_i v(\alpha, w_i) = F$$

e, dato che α cade sotto l'ipotesi di induzione,

$$v(\alpha, w_i) = F \iff v'(\alpha, w_k) = F$$

con $w_i \approx w_k$, pertanto avremo che $wR'w_k$, e quindi

$$v'(\alpha, w) = F$$

Inversamente, supponiamo che $v'(\alpha, w) = F$; allora

$$v'(\alpha, w) = F \iff w_i, wR'w_i, v'(\alpha, w_i) = F$$

e dall'ipotesi induttiva

$$v'(\alpha, w_i) = F \iff v(\alpha, w_i) = F.$$

$wR'w_i$ ma l'ipotesi induttiva non ci garantisce che wRw_i; essa ci garantisce solamente che wRw_k con $w_i \approx w_k$, ma $v(\alpha, w_i) = v(\alpha, w_k)$, e pertanto

$$v(\alpha, w_i) = F \iff v(\alpha, w) = F$$

□

Il teorema appena dimostrato presenta notevoli conseguenze dal punto di vista formale e filosofico; infatti esso afferma che ogni modello è equivalente a un modello in cui i mondi sono tutti distinti tra loro, riducendo la logica modale da logica intensionale a logica estensionale. Infatti, il punto cruciale della valutazione di formule rispetto a mondi è dato dall'appartenenza al mondo, e i mondi rappresentano insiemi di lettere proposizionali e, come tali, sono sottoposti alle "leggi dell'estensione" (ricordiamo che due insiemi sono lo stesso insieme se hanno gli stessi elementi)[40].

2.6 Logiche multimodali

In questo paragrafo considereremo come logiche multi modali quelle logiche, con più modalità, in cui vi sono interrelazioni tra le varie modalità. Presenteremo quindi, come caso di studio, solamente alcune logiche particolari, che risulteranno utili per una formalizzazione del ragionamento giuridico.

Definizione 2.12. Siano:

- W è un insieme non vuoto, (l'insieme dei mondi possibili),
- $\Sigma_i \subseteq W, (1 \leq i \leq m)$,
- $R_i, (1 \leq i \leq n)$ è una relazione binaria, detta relazione di accessibilità, su W,
- υ è una funzione da $S \times W$ a $\{T, F\}$ dove S è l'insieme delle formule del linguaggio

Un *modello di Kripke esteso* per una logica L è una struttura,

$$\langle W, R_1 \dots R_n, \upsilon \rangle \ ;$$

un *modello di Kripke con cluster* per una logica L è una struttura

$$\langle W, \Sigma_1, \dots \Sigma_m, \upsilon \rangle \ ;$$

infine un *modello di Kripke esteso con cluster* per una logica L è una struttura

$$\langle W, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m, R_1, \dots, R_n, \upsilon \rangle \ .$$

Utilizzeremo l'espressione L-modello per indicare indifferentemente uno qualunque dei tre tipi di modello per la logica L. L'appropriata nozione di L-modello per la logica L è ottenuta imponendo delle condizioni alle varie relazioni di accessibilità e ai vari elementi della struttura.

[40] Per ulteriori aspetti della semantica per le logiche modali si vedano: (Lemmon and Scott 1977, Hughes and Cresswell 1968, Hughes and Cresswell 1984, Segerberg 1971, Bowen 1979, Gabbay 1976, Chellas 1980, van Benthem 1984).

Le logiche MM

Con logiche MM denoteremo tutte quelle logiche che sono ottenute combinando, o fondendo, tra loro più logiche modali senza assiomi o regole d'inferenza che stabiliscono rapporti fra le varie modalità.

Siano $L_1, \ldots, L_n$ n logiche con operatori modali distinti e siano $A^i_1, \ldots, A^i_m$ e $\Re^i_1, \ldots, \Re^i_k$, $1 \leq i \leq n$ gli assiomi e le regole d'inferenza della logica L_i; $MM = L_1, \ldots, L_n$ risulta quindi da:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} A^i_1, \ldots, A^i_m$$

e

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \Re^i_1, \ldots, \Re^i_k \; .$$

Supponiamo di voler combinare tra loro due logiche modali, diciamo una modalità epistemica $\Box_1$ di tipo $D45$ e una deontica $\Box_2$ di tipo D; una logica siffatta, chiamiamola ED, è in grado di esprimere e formalizzare concetti concernenti la conoscenza di obblighi (se un'agente sa che A è obbligatorio, allora crede che A sia anche permesso) e obblighi di conoscenza (esempi di obblighi di conoscenza sono gli avvisi di garanzia, o più in generale le notificazioni e i famosi "Miranda warnings" del diritto statunitense). Similmente si possono combinare logiche temporali e logiche deontiche per rappresentare anche l'aspetto temporale del diritto.

Semanticamente le logiche MM sono caratterizzate da modelli di Kripke estesi dove ogni R_i è la relazione di accessibilità che caratterizza la rispettiva logica L_i. La completezza e altre proprietà semantiche del sistema risultante dipenderanno dall'essere godute singolarmente dai sistemi componenti[41].

La logica $S5A$

La logica modale $S5A$ è ottenuta aggiungendo al linguaggio della logica modale monadica un operatore di attualità $\triangle$ con il significato inteso che la formula vale nel mondo attuale. Questa logica è stata sviluppata da Meyer and van der Hoek (1992) allo scopo di rappresentare la conoscenza di un osservatore onnisciente esterno che ragiona sulle conoscenze di un osservatore non monotonico. Infatti questo osservatore è in grado di stabilire se un'asserzione

[41] Su questo punto si veda (Gabbay 1996c, Kracht 1995, Kracht and Wolter 1991, Wolter 1997).

è certa o necessaria, possibile, e se è vera nel mondo attuale; inoltre, questa logica, può rappresentare la conoscenza diretta di un osservatore interno[42].

L'insieme delle formule ben formate di $S5A$ consiste in (i) tutte le formule ben formate modali (ii) tutte le formule della forma $\triangle A$ dove A stessa è una fbf. $S5$ è assiomatizzata come segue:

1. tutti gli assiomi di $S5$
2. $\triangle(A \wedge B) \equiv (\triangle A \wedge \triangle B)$;
3. $\triangle\neg A \equiv \neg\triangle A$;
4. $\Box A \rightarrow \triangle A$;
5. $\triangle A \rightarrow \Box\triangle A$.

La semantica per $S5A$ sarà quindi nei termini di un modello misto $S5$-$D45$, $S5A$-modello, $\langle W, R, \mathcal{A}, v\rangle$ dove W è un insieme non vuoto di mondi, R è una relazione di equivalenza su W, $\mathcal{A}$ è una funzione costante in W tale che

$$\mathcal{A} \subseteq R, \exists! a \in W : \forall w \in W, w\mathcal{A}a \ ;$$

v è l'usuale funzione di valutazione con la seguente clausola addizionale:

$$v(\triangle A, w) = T \iff \forall a \in W : w\mathcal{A}a, v(A, a) = T \ .$$

È facile vedere che $\mathcal{A}$ risulta seriale, transitiva ed euclidea.

Teorema 2.11. *$S5A$ è caratterizzata dalla classe degli $S5A$-modelli*[43].

La logica $S5P_{(n)}$

Similmente alla logica $S5A$ del paragrafo precedente $S5P_{(n)}$ è una estensione di $S5$ intesa a rappresentare le conoscenze e credenze di un osservatore interno. A tal fine vengono introdotti nel linguaggio n operatori modali $P_1, \ldots, P_n$ che indicano che una formula vale in un insiemi di mondi "preferiti". L'insieme di formule di questa logica è ottenuto dall'insieme di formula di $S5$ con l'aggiunta delle formule del tipo $P_i A, (1 \leq i \leq n)$. $S5P_{(n)}$ è assiomatizzata dagli assiomi di $S5$ più i seguenti:

---

[42](Meyer and van der Hoeck 1992)

[43]Per la dimostrazione si veda (Meyer and van der Hoeck 1992).

1. $\Box P_i A \equiv P_i A$;
2. $\neg P_i\bot \rightarrow (P_i P_j A \equiv P_j A)$;
3. $\neg P_i\bot \rightarrow (P_i \Box A \equiv \Box A)$;
4. $\Box A \rightarrow P_i A (1 \leq i \leq n)$.

La semantica per $S5P_{(n)}$ viene data nei termini di un modello misto del tipo $S5$-$K45$ (in breve $S5P_{(n)}$-modelli) $\langle W, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, R, R_1, \ldots, R_n, \upsilon\rangle$ dove $\Sigma_i \subset W$, sono sottoinsiemi (anche vuoti) di mondi preferiti; $R_i = \Sigma \times \Sigma_i \subset R$ sono relazioni binarie transitive ed euclidee in Σ_i; e R è una relazione di equivalenza in W υ è l'usuale funzione di valutazione con la seguente clausola addizionale:

$$\upsilon(P_i A, w) = T \iff \forall x \in \Sigma_i : wR_i x, \upsilon(A, x) = T.$$

TEOREMA 2.12. *$S5P_{(n)}$ è caratterizzata dalla classe degli $S5P_{(n)}$-modelli*[44].

La logica $\mathcal{H}$

La logica modale $\mathcal{H}$, sviluppata da Schwind e Siegel (1993, 1994) per trattare la nozione epistemica di ipotesi e quindi per trattare il ragionamento per default, è ottenuta aggiungendo l'operatore modale $[H]$. L'insieme di formule di $\mathcal{H}$include tutte le formule modali più le formule delle forma $[H]A$. L'operatore d'"ipotesi" H è definito come il duale di $[H]$. In questa accezione HA significa che A è un'ipotesi (di conseguenza $[H]A$ significa che $\neg A$ non è un'ipotesi). Questa logica è assiomatizzata con gli assiomi e le regole d'inferenza di T, per quanto riguarda $\Box$, e dai seguenti assiomi:

1. $\Box A \rightarrow [H]A$
2. $[H](A \rightarrow B) \rightarrow ([H]A \rightarrow [H]B)$.

$\mathcal{H}$ risulta pertanto una logica multimodale di tipo K/T dove gli operatori $\Box$ e il suo duale $\Diamond$ si comportano come modalità di tipo T, mentre l'operatore d'ipotesi H e il suo duale $[H]$ si comportano come modalità di tipo K. In base a queste considerazioni la semantica per $\mathcal{H}$ risulterà in un modello del tipo ($\mathcal{H}$-modello)

$$\langle W, R_1, R_2, \upsilon\rangle$$

[44]Per la dimostrazione si veda (MEYER AND VAN DER HOECK 1992).

in cui W è un insieme non vuoto di mondi; $R_2 \subset W \times W$ è una relazione binaria riflessiva in W, $R_1 \subset W \times W$ è una relazione binaria in W e $R_1 \subset R_2$; v è l'usuale funzione di valutazione con le seguenti due clausole aggiuntive per $[H]$ e $\Box$:

$$v([H]A, u) = T \iff \forall z \in W : uR_1z, v(A, z) = T,$$

$$v(\Box A, u) = T \iff \forall z \in W : uR_2z, v(A, z) = T.$$

TEOREMA 2.13. *$\mathcal{H}$è caratterizzata dalla classe dei $\mathcal{H}$-modelli*[45].

La logica JP

Questa logica è stata sviluppata da Jones e Pörn[46] al fine di avere un sistema che permettesse sia l'inferenza fattuale (factual detachment) che l'inferenza deontica (deontic detachment); inoltre consente di definire diversi tipi di obbligo — obbligo ideale e obbligo sub-ideale — ovviando così all'inconveniente del collasso dell'obbligo sulla necessità logica del sistema in questione (necessità deontica).

In particolare JP è in grado di trattare sia situazioni ideali sia situazioni ideali, situazioni cioè in cui viene ammesso un certo grado di violazione rispetto a quello che si considera il modello ideale. Infatti, come è messo in luce da Kelsen

> La scienza giuridica, descrivendo la validità di un ordinamento giuridico, non asserisce che cosa accade regolarmente, ma che cosa deve accadere secondo un certo ordinamento giuridico (KELSEN 1989, 458).

Formalmente JP è una logica multimodale normale formata a partire da una logica deontica almeno di tipo D, ma non di tipo T con l'aggiunta, accanto agli usuali operatori deontici O^i e P^i, degli operatori O^s e P^s. O^i e P^i mantengono la loro usuale lettura, vale a dire O^iA (P^iA), rispetto al mondo w significa: A vale in tutti i mondi (almeno un mondo) che sono (è) una versione ideale di w, o equivalentemente A è obbligatorio (permesso) nelle situazioni che sono ideali rispetto il mondo dato. O^sA (P^sA), rispetto a un

[45]Per la dimostrazione si veda (SIEGEL AND SCHWIND 1993, SCHWIND AND SIEGEL 1994).

[46](JONES AND PÖRN 1985, JONES AND PÖRN 1986)

mondo w, significa: A vale in tutti i mondi (almeno un mondo) che sono (è) una versione sub-ideale di w, o equivalentemente A è obbligatorio (permesso) nelle situazioni che sono subideali rispetto al mondo dato.

JP ci consente di definire le seguenti nozioni:

- $\mathsf{N}_D A =_{df} (\mathsf{O}^i A \wedge \mathsf{O}^s A)$ (*Necessità deontica*)
- $\mathsf{O}_{\mathsf{T}} A =_{df} (\mathsf{O}^i A \wedge \mathsf{P}^s \neg A)$ (*Dovere*)

Gli operatori O^i, P^i, O^s e P^s si comportano come normali modalità di tipo D. Un modello M per JP è quindi una struttura

$$M = \langle W, R_i, R_s, v \rangle$$

dove W è un insieme non vuoto di mondi, R_i, $R_s \subseteq W \times W$ sono due relazioni binarie seriali (non riflessive) in W, che vengono iterpretate come: $wR_iv = v$ è una versione ideale di w, e $wR_sv = v$ è una version sub-ideale di w, soggette alle seguenti condizioni

C1: $R_i \cap R_s = \emptyset$

C2: $\{\langle w, w \rangle : w \in W\} \subseteq R_i \cup R_s$[47]

vale a dire che non esiste alcun mondo (situazione) che sia allo stesso tempo una versione ideale e una versione sub-ideale di un'altro mondo e che ogni mondo o è una versione ideale di se stesso o è una versione sub-ideale di se stesso; da ora in poi utilizzeremo le espressioni mondo ideale (sub-ideale) al posto di mondo ideale (sub-ideale) rispetto a un dato mondo.

La funzione di valutazione v è caratterizzata dalle seguenti clausole per gli operatori deontici:

$$v(\mathsf{O}^i A, v) = T \Leftrightarrow \forall v \in W : wR_iv \rightarrow v(A, v) = T$$

[47] Questa condizione è stata abbandonata in (Jones 1991); in questo modo un mondo può essere sia una versione ideale sia una versione sub-ideale di se stesso. Riteniamo tuttavia che una migliore soluzione sia quella di parametrizzare l'idealità e la subidealità rispetto l'"oggetto d'interesse" (subject matter), si veda (Epstein 1990). Infatti una sezione del Codice di Procedura Penale è dedicata ai reati connessi, in particolare in un procedimento penale prove ottenute in altri procedimenti possono venire prese in considerazione solamente se vengono giudicate rilevanti per (o connesse con) il procedimento in questione. Difficilmente un'infrazione per divieto di sosta verrà presa in considerazione in un procedimento per omicidio.

$$v(\mathsf{O}^s A, v) = T \Leftrightarrow \forall v \in W : wR_s v \rightarrow v(A, v) = T$$

Vale a dire, una formula $\mathsf{O}^i A$ è vera se e solo se A è vera in tutti i mondi che sono una versione ideale del mondo attuale; analogamente $\mathsf{O}^s A$ è vera solamente se A è vera in tutti i mondi che sono una versione ideale del mondo attuale.

CAPITOLO 3

Sistemi deduttivi indicizzati

3.1 Introduzione

Nel capitolo 1, in particolare nella sezione 1.3, abbiamo argomentato che la logica si applica al diritto, e quindi all'informatica giuridica, in quanto studio della nozione di conseguenza e di dimostrazione, e abbiamo sostenuto che un sistema deduttivo indicizzato può fornire risposta alle esigenze che si presentano in tali campi. In questo capitolo presenteremo un sistema deduttivo indicizzato (KEM) per le logiche modali, e quindi per le logiche deontiche, che, come vedremo, soddisfa i seguenti criteri:

1. Modularità;
2. Flessibilità;
3. Componibilità;
4. Efficienza;
5. Naturalezza.

KEM è un sistema di dimostrazione ad albero per le logiche modali, nello spirito dei LDS, che sfrutta una base proposizionale (KE) più efficiente dei tableaux[1] e un sistema di indici per simulare il comportamento della relazione di accessibilità rispetto ai mondi possibili. Il "nocciolo inferenziale" di KEM è caratterizzato dalla combinazione di due regole strutturali, PB (principio di bivalenza) e PNC (principio di non contraddizione), con un insieme di regole di tableaux e deduzione naturale. La disciplina di indicizzazione $\mathscr{E}$ fornisce i criteri per propagare gli indici in funzione delle regole utilizzate e, insieme all'algebra degli indici $\mathscr{A}$, permette di simulare il comportamento e la struttura dei mondi nel modello.

[1] (D'Agostino 1990, D'Agostino and Mondadori 1994)

Come abbiamo visto, un LDS è costituito dalla tripla $\langle \mathscr{S}, \mathscr{A}, \mathscr{E} \rangle$ dove $\mathscr{S}$ è un linguaggio logico (connettivi, operatori, formule ben formate), $\mathscr{A}$ è un'algebra degli indici con le appropriate operazioni, e $\mathscr{E}$ è la disciplina di indicizzare formule di $\mathscr{S}$ rispetto a $\mathscr{A}$, congiuntamente a regole di deduzione che rispecchiano la propagazione degli indici in accordo con la semantica intesa per la logica in questione. Nelle sezioni 3.2 e 3.3 introdurremo l'algebra degli indici $\mathscr{A}$ di KEM, quindi nella sezione 3.4 presenteremo $\mathscr{E}$. Dopo aver definito i caratteri basilari del sistema deduttivo indicizzato KEM passeremo (sezione 3.5) a mostrare come ottenere diverse logiche modali, deontiche e multimodali come coppie ordinate $\langle \vdash, LDS_{\vdash} \rangle$, specificando le regole di inferenza ($\vdash$) e le operazioni sull'algebra ($LDS_{\vdash}$) che le caratterizzano. Presenteremo quindi delle proprietà delle operazioni dell'algebra degli indici (sezione 3.6) che ci serviranno per definire una procedura di ricerca per la dimostrazione automatica (sezione 3.8) e per dimostrare (sezione 3.7) la correttezza e completezza delle caratterizzazioni via KEM.

3.2 Linguaggio degli indici

Estendiamo il linguaggio della logica modale con i seguenti insiemi non vuoti:

- $\Phi^i_C = \{w^i_1, w^i_2, \dots\}$ $(0 \leq i \leq n)$ insieme degli indici costanti di tipo i;
- $\Phi^i_V = \{W^i_1, W^i_2, \dots\}$ $(0 \leq i \leq n)$ insieme degli indici variabili di tipo i.

Gli insiemi rispettivamente di indici costanti e variabili saranno così ottenuti:

$$\Phi_C = \bigcup_i \Phi^i_C$$
$$\Phi_V = \bigcup_i \Phi^i_V \ .$$

Da questi due insiemi costruiamo ricorsivamente l'insieme degli indici nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Im \;&=\; \bigcup_{1 \leq i} \Im_i \text{ con } \Im_i : \\ &\Im_1 = \Phi_C \cup \Phi_V; \\ &\Im_2 = \Im_1 \times \Phi_C; \\ &\Im_{n+1} = \Im_1 \times \Im_n, (n > 1). \end{aligned}$$

Un indice così definito è o un indice costante, o un indice variabile, o un indice composto. Possiamo concepire un indice costante come un mondo possibile *dato* in un modello di Kripke; un indice variabile, invece, denoterà un qualunque mondo (tutti i mondi) in un modello di Kripke; infine, un indice composto (k', k) rappresenterà il mondo (i mondi) denotato (denotati) da k', e indicherà inoltre il mondo (i mondi), k, dai quali k' è accessibile. In seguito utilizzeremo w_n e W_m per indicare sia elementi di Φ_C e di Φ_V, senza interessarci del loro tipo, sia elementi di Φ_C^0 e Φ_V^0; il contesto in cui appariranno chiarirà il loro uso.

Esempio 3.1. L'indice (W_1, w_1) rappresenta il percorso che ci conduce all'insieme di mondi W_1 accessibili da w_1; l'indice $(w_2, (W_1, w_1))$ rappresenta il percorso che ci porta al mondo w_2 accessibile da tutti i mondi accessibili da w_1, cioè, w_2 è accessibile dal percorso (W_1, w_1).

Data una n-upla $x_1, \ldots, x_n$ utilizzeremo $\Pi_n^i(x_1, \ldots, x_n)$ per denotare la funzione di proiezione rispetto l'i-esimo elemento dell'n-upla; così, per esempio, $\Pi_n^1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ e $\Pi_n^n(x_1, \ldots, x_n) = x_n$.

D'ora in poi utilizzeremo le lettere $i, j, k, \ldots$ per indicare indici qualsiasi, e $i^p, j^q, k^r, \ldots$ per indici qualsiasi di tipo $p, q, r, \ldots$.

Definizione 3.1. Per ogni indice $i \in \Im$, $h(i) = \Pi_n^1(i)$; $b(i) = \Pi_n^n(i)$; chiameremo $h(i)$ la testa di i, e $b(i)$ il corpo di i.

Si noti che le nozioni di testa e di corpo sono ricorsive. Se $b(i)$ denota il corpo di i, $b(b(i))$ denoterà il corpo di $b(i)$ (il corpo del corpo di i), $b(b(b(i)))$ il corpo di $b(b(i))$ (il corpo del corpo del corpo di i); e così via.

Esempio 3.2. Dato l'indice $i = (w_4, (W_3, (w_3, (W_2, w_1))))$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&b(i) = (W_3, (w_3, (W_2, w_1))),\\
&b(b(i)) = (w_3, (W_2, w_1)),\\
&b(b(b(i))) = (W_2, w_1),\\
&b(b(b(b(i)))) = w_1.
\end{aligned}$$

Definizione 3.2. Chiameremo ogni $b(i)$, $b(b(i))$, ecc., segmento di i e lo denoteremo con $s(i)$.

Ovviamente, per come sono costruiti gli indici e per la definizione di corpo, ogni segmento è un indice.

Definizione 3.3. Sia $\mathcal{L}$ un insieme di indici. Diciamo che $\mathcal{L}'$ è la *mappa* di $\mathcal{L}$ se

$$\mathcal{L}' = \{i \in \Im : i = s(j), j \in \mathcal{L}\}$$

Definizione 3.4. Definiamo la lunghezza di un indice i, $l(i)$, come il numero di indici costanti e di indici variabili che lo compongono; formalmente $l(i) = n \Leftrightarrow i \in \Im_n$. Utilizzeremo $s^n(i)$ per denotare il segmento di i di lunghezza n, vale a dire: $s^n(i) = s(i)$ tale che $l(s(i)) = n$; $h^n(i)$ indicherà la testa del segmento di i di lunghezza n, cioè $h(s^n(i))$.

Definizione 3.5. Per ogni indice $i, 1 \leq n \leq l(i)$, definiamo il *controsegmento-n* di i come:

$$c^n(i) = h(i) \times (\cdots \times (h^k(i) \times (\cdots \times (h^{n+1}(i), w_0))))(n < k < l(i))$$

dove w_0 è un indice “dummy”.

Il controsegmento-n di un indice evidenzia ciò che rimane di un indice dopo aver eliminato il segmento di lunghezza n. w_0 è un indice “segnaposto” che verrà sostituito dall'indice appropriato laddove verrà applicata la nozione di controsegmento. Ad esempio, nella stessa definizione di controsegmento, $w_0 = s^n(i)$. Segue inoltre che se $n = l(i)$, allora $c^n(i) = i = s^n(i)$ e, di conseguenza, in questo caso $w_0 = i$.

Esempio 3.3. Dato l'indice $i = (w_4, (W_3, (w_3, (W_2, w_1))))$, in base alle definizioni appena date, la sua lunghezza $l(i)$ è 5, il suo segmento di lunghezza 3 è $s^3(i) = (w_3, (W_2, w_1)$, e il controsegmento-3 è $c^3(i) = (w_4, (W_3, w_0))$, dove $w_0 = (w_3, (W_2, w_1)$.

Per chiarire ulteriormente la nozione di controsegmento, che verrà usata frequentemente nel prosieguo del presente lavoro, forniamo l'elenco comparativo dei segmenti di i (colonna di sinistra) con i relativi controsegmenti (colonna di destra)

$$\begin{array}{ll}
s^1(i) = w_1 & c^1(i) = (w_4, (W_3, (w_3, (W_2, w_0)))) \\
s^2(i) = (W_2, w_1) & c^2(i) = (w_4, (W_3, (w_3, w_0))) \\
s^3(i) = (w_3, (W_2, w_1)) & c^3(i) = (w_4, (W_3, w_0)) \\
s^4(i) = (W_3, (w_3, (W_2, w_1))) & c^4(i) = (w_4, w_0)
\end{array}$$

infine

$$\begin{array}{ll}
s^5(i) = i & c^5(i) = w_0
\end{array}$$

Definizione 3.6. Un indice i è *ristretto* se $h(i) \in \Phi_C$, altrimenti è *non ristretto.*

Definizione 3.7. Un indice i è *m-preferito* se e solo se $i \in \Im^m$ dove

$$\Im^m = \{i \in \Im : h(i) \text{ è } w_j^m \text{ o } W_j^m, 1 \leq m \leq n\} \ .$$

Definizione 3.8. Un indice i è *m-puro* se e solo se ogni suo segmento è m-preferito.

Abbiamo anticipato che indici ristretti, come ad esempio $(w_4,(W_3,w_1))$, rappresentano un dato mondo, più precisamente il mondo denotato dalla testa, mentre il corpo rappresenta il percorso di accessibilità fra i mondi per arrivare a tale mondo. Un indice non ristretto, (W_2,w_1), invece, sta per un qualunque mondo accessibile dai suoi predecessori. È importante notare che nelle logiche che non contengono l'assioma **D** (e che quindi sono non seriali) indici non ristretti possono non denotare alcun mondo. Le unificazioni che definiremo del paragrafo 3.3 ci informano quando due indici denotano un mondo in comune, o meglio (lemma 3.6), se l'intersezione degli insiemi di mondi che essi denotano non è vuota; questo è possibile se tutti i simboli di mondi sono denotanti. Tuttavia il risultato di unificazione conterrà delle variabili di cui non sappiamo se denotano o meno l'insieme vuoto. Utilizzeremo la notazione W'_n per indicare che l'indice di mondo variabile W_n è denotante. Estendiamo la notazione anche agli indici costanti tenendo presente che $w_n = w'_n$ dato che in ogni caso una costante è denotante.

Definizione 3.9. Un simbolo di mondo è *denotante* se e solo se appartiene all'insieme $\text{Den} = \Phi_C \cup \{W'_n : W'_n \in \Phi_V\}$.

Definizione 3.10. Un indice i è *m-ground* $(0 \leq m \leq n)$ se e solo se

$$\forall s(i) : h(s(i)) \notin \Phi_V^m \ ;$$

m-debolmente ground $(0 \leq m \leq n)$ se e solo se $\exists h^p(i) : h^p(i) \in \Phi_V^m$, allora $\exists s^j(i), j < p : h^j(i) \in \Im_1^m \cap \text{Den}$; *ground* se e solo se è m-ground per ogni m.

Definizione 3.11. Un indice i è *p, q-convergente in m* se e solo se

$$\exists s^n(i) : h^n(i) \in \Im_1^m \cap \text{Den}, h^{n-p}(i) \in \Phi_V^m \text{ e } h^{n-p-q}(i) \in \Im_1^m \cap \text{Den} \ .$$

Un indice i è p, q-*strettamente convergente in* m se e solo se è p, q-convergente in m e i controsegmenti $c^{n-p}(s^n(i))$ e $c^{n-p-q}(s^{n-p-1}(i))$ sono ground. Infine i è *convergente* se e solo se è p, q-convergente per $p, q = 1$.[2]

Esempio 3.4. L'indice $i = (W_4^n, (w_3^m, (w_2^k, (W_1^m, w_1^m))))$ è $2, 1$-convergente in m; infatti $b(i)$ è ristretto e m-preferito, inoltre $s^2(i) = c^2(b(i))$ è non ristretto e m-preferito; $s^1(i) = c^3(b(i))$ è ristretto e anch'esso m-preferito. Si noti inoltre che i due controsegmenti in questione sono ground rendendo così i $2, 1$-strettamente convergente.

Definizione 3.12. Dati due insiemi di indici $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ due indici $i \in \mathcal{L}$ e $k \in \mathcal{L}'$ sono *simili* se

1. $l(i) = l(k)$; e

2. $h^n(i) \in \Phi^* \iff h^n(k) \in \Phi^*$

Dati due insiemi di indici $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ due indici $i \in \mathcal{L}$ e $k \in \mathcal{L}'$ sono *strutturalmente isomorfi* se

1. sono simili, e

2. e date le coppie di indici simili i, k e i', k'

$$h^n(i) = h^m(i') \iff h^n(k) = h^m(k')$$

Abbiamo anticipato che indici ristretti, come ad esempio $(w_4, (W_3, w_1))$, rappresentano un dato mondo, più precisamente il mondo denotato dalla testa, mentre il corpo rappresenta il percorso di accessibilità fra i mondi per arrivare al mondo denotato dalla testa. Un indice non ristretto, (W_2, w_1), invece, sta per un qualunque mondo accessibile dai suoi predecessori. È importante notare che nelle logiche che non contengono l'assioma **D** (e che quindi sono non seriali) indici non ristretti possono non denotare alcun mondo.

[2] Si può estendere la definizione di p, q-convergenza anche al caso in cui i mondi "rilevanti" sono di tipo differente; nella stessa maniera si può tenere conto dei tipi di mondo nei sotto percorsi che conducono ai mondi rilevanti.

La maniera in cui abbiamo costruito gli indici a partire dagli insiemi delle costanti e delle variabili impedisce che espressioni come, ad esempio,

$$\begin{aligned} i &= (w_2, (w_1, W_1)), \\ j &= (W_2, w_2, (W_1, w_1)), \\ j' &= ((W_2, w_2), (W_1, w_1)), \\ k &= (w_2, W_2, (W_1, w_1)), \\ k' &= ((w_2, W_2), (W_1, w_1)) \end{aligned}$$

siano indici: la prima non è un indice, dato che $s^1(i) = W_1$,[3] mentre la definizione di un indice richiede che il segmento iniziale di un indice di lunghezza superiore ad 1 sia una costante; j e k non sono indici dato che non sono coppie ordinate, mentre j' e k', pur essendo coppie ordinate, non sono indici dato che $h(j'), h(k') \notin \Im_1$; j e k inoltre sarebbero di lettura ambigua una volta interpretati: se denotano, rispettivamente, "tutti i mondi accessibili dal mondo w_2, accessibile a sua volta da tutti i mondi accessibili da w_1", e "il mondo w_2 accessibile da tutti i mondi accessibili da tutti i mondi a loro volta accessibili da w_1" la loro lettura corrisponde a quella intesa per gli indici e quindi la loro formulazione corretta è

$$j = (W_2, (w_2, (W_1, w_1)))$$

e

$$k = (w_2, (W_2, (W_1, w_1)))\ ;$$

tuttavia essi possono venire letti differentemente, vale a dire "tutti i mondi accessibili da w_1, (W_1, w_1) accedono a tutti i mondi accessibili da w_2, (W_2, w_2)" e "tutti i mondi accessibili da w_1, (W_1, w_1) accedono a w_2, siccome w_2 è un mondo a cui tutti i mondi accedono". Questa ultima lettura corrisponde rispettivamente alla lettura di j' e di k'. Dato che lavoreremo con logiche modali "standard", non avremo bisogno di tali indici. Infatti Russo (1996) ha dimostrato che una logica modale indicizzata con configurazione

[3] Un indice siffatto significherebbe in effetti che un dato mondo è accessibile da tutti i mondi del modello. La principale causa di esclusione di un indice del genere risiede nel fatto che *KEM* è un metodo di dimostrazione per refutazione, e che per dimostrare che una formula è una contraddizione in un qualche sistema modale, è sufficiente mostrare che non esiste *un mondo*, in un modello caratterizzante il sistema in questione, in cui la formula è vera.

iniziale di un singolo mondo è equivalente al rispettivo sistema hilbertiano. Indici composti come j' e k' risultano utili, e fondamentali, quando si trattano logiche ottenute combinando logiche a livelli differenti[4].

Dicendo che un indice i è m-ristretto intendiamo che il mondo denotato dalla testa dell'indice o è un mondo di tipo m o è accessibile dal corpo in virtù della relazione di accessibilità R_m, dove i tipi di mondi e le relazioni di accessibilità saranno in funzione della logica e del modello in questione. Per esempio, l'indice (w_2^m, w_1) potrebbe significare che il mondo w_2 è accessibile in virtù della relazione R_m da w_1.

Un indice m-ground, ad esempio $k = (W_1^n, (w_2^m, w_1))$, ci dice che l'indice non contiene istanze di segmenti m-preferiti non ristretti; si noti che k non è n-ground per la presenza di W_1^n, mentre è p-ground dato che non ci sono istanze di indici variabili di tipo p. La nozione di indice m-debolmente ground, come, ad esempio, l'indice $k = (W_2^m, (W_1^n, (w_2^m, w_1)))$, è intesa significare che la classe di mondi di tipo m non è vuota[5].

La nozione di indice p, q-convergente è intesa a determinare se un percorso di accessibilità ha qualche passaggio obbligato, o, altrimenti, se tutti i mondi visibili in p passi da un dato mondo convergono in q passi in un singolo mondo.

3.3 Unificazioni

Nel corso delle dimostrazioni dovremo manipolare, oltre alle unità dichiarative, anche gli indici. L'indice corrisponde alla struttura semantica della logica in questione; avremo bisogno quindi di uno strumento di calcolo che ci permetta di stabilire quando due indici denotano uno stesso mondo. Chiameremo *unificazione* l'operazione che ci permette di determinare se le

[4]Sulla combinazione di logiche si veda (D'Agostino and Gabbay 1996, Gabbay 1996c, Gabbay 1996b).

[5]In questo lavoro tratteremo unicamente la nozione di indice *post* m-debolmente ground. Tuttavia, tale nozione può essere facilmente modificata in quella di *pre* m-debolmente ground. La prima significa che se in una data posizione in un indice, in una catena di mondi in relazione di accessibilità tra loro, compare un indice m-preferito, da tal punto in poi saremo sicuri che tutte le occorrenze successive di indici di tipo m saranno denotanti. D'altra parte, la nozione di pre m debolmente ground ci garantisce che fino ad un certo punto tutte le occorrenze di indici di tipo m saranno denotanti. Ovviamente tali nozioni sono strettamente correlate con le relazioni di accessibilità corrispondenti.

denotazioni dei due indici hanno un mondo in comune. Ovviamente, tale operazione dipenderà dalle caratteristiche della logica considerata. Infatti, come abbiamo visto, la logica modale è modulare, nel senso che ogni assioma caratteristico determina una condizione particolare sulla relazione di accessibilità, così che combinando diversamente gli assiomi otteniamo diverse logiche caratterizzate semanticamente dall'unione delle condizioni sulle relazioni caratteristiche associate ai vari assiomi[6]. Di conseguenza, costruiremo una unificazione per ogni assioma. Chiameremo queste unificazioni unificazioni "alte" e le indicheremo con σ^A, dove A è il nome dell'assioma. Dopo aver costruito le unificazioni alte potremo combinarle tra loro in una unica unificazione, corrispondente alla relazione d'accessibilità che caratterizza la logica ottenuta combinando i rispettivi assiomi. Chiameremo queste ultime unificazioni unificazioni "basse" e le simbolizzeremo con σ_L, dove L è il nome della logica.

Definizione 3.13. (Sostituzione di mondi) Definiamo la *sostituzione di mondi* come una funzione $\theta : \Phi_C \times \Phi_V \mapsto \Im$ nel seguente modo:

$$\theta(i) = \begin{cases} i & i \in \Phi_C \\ j \in \Im^k & i \in \Phi_V^k \end{cases}$$

Definizione 3.14. (Sostituzione di indici) Definiamo la *sostituzione di indici* come una sequenza di funzioni così definita: $\rho : \Im \mapsto \Im$ tale che

$$\begin{aligned} \rho_1(i) &= \theta_1(i) & i &\in \Im_1 \\ \rho_2(i) &= (\theta_2(h(i)), \rho_1(b(i)) & i &\in \Im_2 \\ \rho_n(i) &= (\theta_n(h(i)), \rho_{n-1}(b(i))) & i &\in \Im_n \end{aligned}$$

A partire dalla sostituzione ρ costruiamo l'unificazione σ (σ-unificazione), l'unificazione in base alla quale poi costruiremo tutte le unificazioni alte, come segue:

Definizione 3.15. $\forall i, k \in \Im$

$$(i, k)\sigma = \rho(i) \iff \exists \rho : \rho(i) = \rho(k)$$

[6](Chellas 1980)

in particolare stabiliamo che, se $l = (i,k)\sigma$, allora

$$h^n(l) = \begin{cases} h^n(k) & h^n(k) \in \mathrm{Den} \\ h^n(i)' & k \in \Phi_V \\ h^n(k)' & i \in \Phi_V, l(k) > 1 \\ h^n(i)' & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo cogliamo la natura “molteplice” degli indici variabili. Infatti, secondo l'interpretazione che ne abbiamo dato, essi rappresentano un insieme di mondi; quindi due indici come $(W_1, (w_2, w_1))$ e $(w_3, (W_1, w_1))$ unificano. Qui W_1 rappresenta un insieme di mondi, l'insieme di mondi “visibili” da w_1 che coincide con insieme di mondi visibili da w_2; dall'unificazione sappiamo che w_2 e w_3 sono elementi di questo insieme. Se avessimo concepito l'unificazione come semplice sostituzione i due indici non avrebbero unificato dato che avremmo dovuto sostituire uniformemente W_1 o con w_2 o con w_3, ottenendo due indici differenti.

Utilizzeremo la notazione $(i,k)\sigma$ per indicare sia che i e k σ-unificano, sia il risultato della loro unificazione.

Nel paragrafo 3.5 definiremo formalmente le unificazioni alte corrispondenti ai vari assiomi (σ^A-unificazioni), a partire dalle quali otterremo l'unificazione composta $\sigma^{A_1\cdots A_n}$ che verrà utilizzata per costruire l'unificazione della logica $L = A_1 \cdots A_n$ (σ_L-unificazione).

Definizione 3.16. $\forall i,k \in \Im$

$$(i,k)\sigma^{A_1\cdots A_n} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{A_1} & \text{se } C_1 \\ \vdots & \vdots \\ (i,k)\sigma^{A_n} & \text{se } C_n \end{cases}$$

dove $C_1, \ldots, C_n$ sono condizioni che variano da logica a logica[7].

Definizione 3.17. $\forall i,k \in \Im$

$$(i,k)\sigma_L = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{A_1\cdots A_n} \\ (i,k)\sigma^{A_1\cdots A_n} \end{cases}$$

dove $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_L$ e $A_1 \cdots A_n$ sono i nomi degli assiomi che caratterizzano L.

[7]Le varie condizioni $C_1, \ldots, C_n$ verranno fornite nel paragrafo 3.5.

Tuttavia, per alcune logiche daremo delle σ_L-unificazioni specializzate che non ricalcano lo schema generale esposto nella definizione 3.17.

3.4 Regole di inferenza

Classificheremo le regole di inferenza di KEM a seconda del loro significato e del loro comportamento. Esse saranno quindi classificate come *strutturali*, se prescindono dal "significato" degli operatori e connettivi che compaiono nelle premesse, altrimenti come *non strutturali.* Le regole non strutturali rispecchieranno il "significato" degli operatori e connettivi coinvolti, mentre quelle strutturali rispecchieranno condizioni particolari che caratterizzano la semantica della logica in questione[8].

In seguito utilizzeremo una particolare notazione, conosciuta come notazione uniforme[9], che raggruppa classi di formule a seconda del loro comportamento vero-funzionale. Per prima cosa scriveremo una formula con il suo valore di verità nel seguente modo: se il valore di verità della formula $A = V$ indicheremo questo fatto con TA, se il valore di A è falso scriveremo FA. Inoltre, dato che ci interessiamo al calcolo proposizionale classico, avremo che $T\neg A = FA$ e $F\neg A = TA$.

Classificheremo le formule in: formule di tipo α — che sono le formule che si comportano come congiunzioni vere —, e formule di tipo β — che sono equivalenti a disgiunzioni vere.

Abbiamo così la classificazione rappresentata dalle seguenti tavole:

α	α_1	α_2
$TA \wedge B$	TA	TB
$FA \vee B$	FA	FB
$FA \rightarrow B$	TA	FB
$F\neg A$	TA	TA

β	β_1	β_2
$FA \wedge B$	FA	FB
$TA \vee B$	TA	TB
$TA \rightarrow B$	FA	TB
$T\neg A$	FA	FA

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sono le *componenti* della formula data; esse compaiono con il valore per cui la formula data assume il valore T o F. Con X^C, la *complementare* o *coniugata* di X, indicheremo la formula ottenuta da X cambiando il segno, vale a dire cambiando T in F e F in T, per cui se $X = TA$ allora $X^C = FA$.

[8](Došen 1993, Gabbay 1996b, Prawitz 1965, D'Agostino and Gabbay 1994)

[9](Smullyan 1968b)

Uno dei vantaggi di questa notazione è quello di essere economica; infatti la sua adozione ci consentirà di scrivere solamente regole per le formule di tipo α e di tipo β al posto delle regole per la congiunzione, disgiunzione, implicazione.

Forniamo ora alcune relazioni intercorrenti tra le formule di tipo α e di tipo β:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \beta^C & \alpha_1 = \beta_1^C & \alpha_2 = \beta_2^C \\ \beta = \alpha^C & \beta_1 = \alpha_1^C & \beta_2 = \alpha_2^C. \end{array}$$

Esempio 3.5. Se $\alpha = TA \wedge B$ allora $\alpha_1 = TA$ e $\alpha_2 = TB$, quindi $\alpha^C = FA \wedge B$ da cui $\alpha_1^C = FA$ e $\alpha_2^C = FB$; d'altra parte sappiamo che $FA \wedge B$ è di tipo β; quindi le sue componenti saranno $\beta_1 = FA$ e $\beta_2 = FB$ così che $\alpha_1 = \beta_1^C$ e $\alpha_2 = \beta_2^C$.

Estendiamo la notazione uniforme alle formule modalizzate generalizzando la notazione uniforme per le logiche modali[10].

ν_i	ν_0
$T\Box_i A$	TA
$F\Diamond_i A$	FA

π_i	π_0
$F\Box_i$	FA
$T\Diamond_i A$	TA

Estendiamo la definizione di formule complementari alle formule modalizzate come riportato nella seguente tabella:

X	X^C	
$T\Box_i A$	$F\Box_i A$	$T\Diamond_i \neg A$
$F\Diamond_i A$	$T\Diamond_i A$	$F\Box_i \neg A$
$F\Box_i A$	$T\Box_i A$	$F\Diamond_i \neg A$
$T\Diamond_i A$	$F\Diamond_i A$	$T\Box_i \neg A$

Una formula di tipo ν_i avrà come complementari le formule π_i tali che π_0 è complementare di ν_0; analogamente, le complementari di una formula di tipo π_i saranno le formule di tipo ν_i tali che il loro ν_0 è complementare a π_0.

Forniamo anche per le formule di tipo ν e π le relazioni che intercorrono tra esse:

$$\begin{array}{ll} \nu = \pi^C & \nu_0 = \pi_0^C \\ \pi = \nu^C & \pi_0 = \nu_0^C. \end{array}$$

[10]Per una esposizione della notazione uniforme in logica modale si veda (Fitting 1983).

Le regole di inferenza saranno definite per formule segnate indicizzate così definite:

Definizione 3.18. Una *formula segnata indicizzata* (LS-formula) è un'espressione della forma SA, i in cui $S \in \{T, F\}$, A è una fbf modale e $i \in \Im$. Chiameremo SA unità dichiarativa e i indice.

Possiamo interpretare una LS-formula come una informazione sul valore (segno) di una formula nel mondo denotato dall'indice.

Definizione 3.19. Due LS-formule, X, i e Y, k sono σ_L-complementari se $Y = X^C$ e $(i, k)\sigma_L$.

In seguito dimostreremo (vedi teorema 3.6) che, se due indici σ_L-unificano, l'intersezione delle loro denotazioni non è vuota; questo comporta che due formule σ_L-complementari comportano una contraddizione nel mondo comune ai due indici.

Uno dei vantaggi di operare con LS-formule consiste nel poter fare inferenze o solo sulle unità dichiarative o solo sulla parte indicizzata, o su entrambe. Così, ad esempio, potremmo inferire la chiusura di un ramo perché otteniamo due formule σ_L-complementari, oppure perché otteniamo un indice (un mondo) che non può esistere data una certa configurazione del modello[11].

3.4.1 Regole strutturali

Le due regole strutturali basilari che utilizzeremo, e che varranno per tutte le logiche che considereremo nel presente lavoro, sono formulate come segue.

$$\frac{}{X, i \qquad X^C, i}[i \text{ ristretto}] \tag{PB}$$

Questa regola corrisponde al principio del terzo escluso, o principio di bivalenza, da cui prende il nome, ed è il corrispettivo semantico del taglio[12]. Essa afferma che una formula o è vera o è falsa nel mondo associato all'indice i. È importante notare che PB è una regola a 0-premesse ed è l'unica regola di ramificazione di KEM.

$$\frac{\begin{array}{c} X, i \\ X^C, k \end{array}}{\times}[(i, k)\sigma_L] \tag{PNC}$$

[11] (Russo 1996)

[12] (D'Agostino and Mondadori 1994)

Questa regola prende il nome dal principio di non contraddizione e comporta la chiusura di un ramo ogni qualvolta abbiamo due formule σ_L-complementari, cioè quando in un mondo abbiamo una formula e la sua negazione.

Esempio 3.6.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{1.T\Box A, (w_2, w_1)} \\ 2.T\Box A, (w_2, w_1) & 3.F\Box A, (w_2, w_1) \\ & \times \end{array}$$

In questo esempio la formula 1 si suppone data; dato che PB è una regola a 0 premesse possiamo applicarla a ogni passo di una dimostrazione. La applichiamo al passo $2, 3$ rispetto alla formula $\Box A$ e indice (w_2, w_1); a questo punto nel ramo di destra abbiamo due formule σ_L-complementari e possiamo quindi chiudere il ramo con una applicazione di PNC.

Altre regole strutturali verranno utilizzate per rappresentare particolari condizione caratterizzanti semanticamente alcune logiche.

3.4.2 Regole non strutturali

Le regole non strutturali descrivono il comportamento e il significato degli operatori e connettivi coinvolti. Esse sono definite come segue.

$$\frac{\alpha, k}{\alpha_1, k} \qquad \frac{\alpha, k}{\alpha_2, k} \tag{α}$$

Le regole α (o α-regole) corrispondono alle regole lineari dei tableaux e alla eliminazione della congiunzione della deduzione naturale[13]; l'indice rimane immutato nel passaggio dalla premessa alla conclusione in quanto la congiunzione viene valutata localmente.

Un esempio di applicazione della regola α è il seguente:

$$\frac{FA \vee \Box B, (W_1, w_1)}{FA, (W_1, w_1)} \tag{3.1}$$

In 3.1 l'unità dichiarativa della premessa $\alpha, k = FA \vee \Box B, (W_1, w_1)$ è una formula di tipo α, quindi possiamo applicare la regola α rispetto il primo

[13]Più precisamente alla eliminazione di un connettivo che all'interno della formula segnata si comporta semanticamente come la congiunzione.

componente, α_1, ottenendo così $FA, (W_1, w_1)$.

$$\frac{\begin{array}{c}\beta, j\\ \beta_1^C, k\end{array}}{\beta_2, (j,k)\sigma_L}[(j,k)\sigma_L] \qquad \frac{\begin{array}{c}\beta, j\\ \beta_2^C, k\end{array}}{\beta_1, (j,k)\sigma_L}[(j,k)\sigma_L] \tag{β}$$

Le regole β (o β-regole) non hanno un corrispettivo nei tableaux ma corrispondono a ben noti schemi inferenziali come il *modus ponens*, *modus tollens*, e *sillogismo disgiuntivo*. Nella deduzione naturale questi schemi corrispondono alla eliminazione del condizionale[14]. Il fatto di essere una regola a 2 premesse, e il comportamento dei connettivi, comporta che gli indici delle due premesse devono σ_L-unificare, vale a dire bisogna che esista un mondo rispetto al quale possiamo applicare la regola d'inferenza localmente. Ad esempio in

$$\frac{\begin{array}{c}F\Diamond A \wedge B, (w_3, (W_1, w_1))\\ T\Diamond A, (W_2, (w_2, w_1))\end{array}}{FB, (w_3, (w_2, w_1))} \tag{3.2}$$

gli indici $(w_3, (W_1, w_1))$ e $(W_2, (w_2, w_1))$ σ-unificano con la sostituzione $\rho : W_1 \mapsto w_2, W_2 \mapsto w_3$; quindi possiamo applicare la regola β localmente rispetto all'indice $(w_3, (w_2, w_1))$ ottenendo $FB, (w_3, (w_2, w_1))$.

$$\frac{\nu_i, k}{\nu_0, (k', k)}[k' \text{ nuovo e } k' \in \Phi_V^i] \tag{ν_i}$$

Le regole ν_i (o ν_i-regole) corrispondono alla eliminazione del necessario dei tableaux e della deduzione naturale, e simulano esattamente il comportamento semantico degli operatori modali coinvolti. Ad esempio

$$\frac{T\Box(A \to B), (W_2, (w_2, w_1))}{TA \to B, (W_3, (W_2, (w_2, w_1)))} \tag{3.3}$$

Nell'inferenza 3.3 abbiamo eliminato $\Box$ e abbiamo esteso l'indice dell'antecedente con un indice variabile nuovo, W_3, dove "nuovo" significa che non appare nei passi precedenti della dimostrazione.

$$\frac{\pi_i, k}{\pi_0, (k', k)}[k' \text{ nuovo e } k' \in \Phi_C^i] \tag{π_i}$$

Analogamente alle regole ν_i, le regole π_i (o π_i-regole) corrispondono all'eliminazione del possibile, e simulano il comportamento semantico di $T\Diamond_i A$

[14]Vedi nota 13.

e $F\Box_i A$, richiedendo che l'eliminazione dell'operatore comporti l'estensione dell'indice con un indice costante che non appare precedentemente nella dimostrazione, come esemplificato in 3.4.

$$\frac{F\Box(A \to B), (W_2, (w_2, w_1))}{FA \to B, (w_3, (W_2, (w_2, w_1)))} \tag{3.4}$$

3.5 Caratterizzazione delle logiche via KEM

In questo paragrafo forniremo una caratterizzazione delle logiche modali via il sistema KEM. Una logica verrà caratterizzata da un insieme di regole di inferenza e da unificazioni; nel paragrafo 3.7 mostreremo che la caratterizzazione qui offerta dà origine a sistemi deduttivamente equivalenti ai rispettivi sistemi hilbertiani e nel paragrafo 3.6 mostreremo alcune proprietà delle σ_L-unificazioni.

A seconda della lunghezza degli indici otterremo unificazioni che potranno essere differenti pur utilizzando lo stesso schema. Per distinguere questi casi utilizzeremo la seguente notazione: sia $i \in \Im_1$ e $k \in \Im$

$$(i;k) = \begin{cases} i \times k & \text{se } h(k) \neq i \\ k & \text{se } h(k) = i \end{cases}$$

In pratica se $i = w_2$ e $k = (W_1, w_1)$, allora $(i;k) = (w_2, (W_1, w_1))$; se $i = w_2$ e $k = (w_2, w_1)$, allora $(i;k) = (w_2, w_1)$.

3.5.1 Logiche modali

Tutte le logiche dei paragrafi successivi sono caratterizzate dalle regole α, β, ν_i, π_i, PNC e PB, e si differenziano per le σ_L-unificazioni.

La logica K

La logica K è la più piccola logica modale normale ed è caratterizzata dall'assioma **K**. Per la caratterizzazione via KEM, la logica K impone la seguente restrizione su PB: l'indice rispetto al quale PB si applica deve essere già presente nella dimostrazione[15].

[15] Questa condizione vale per tutte le logiche che non contengono l'assioma **D**.

Le unificazioni caratteristiche saranno:

$$(i,k)\sigma^K = (i,k)\sigma \qquad (\sigma^K)$$

dove $\forall n > 1, h^n(i)$ o $h^n(k) \in \mathrm{Den}$.

Esempio 3.7. Gli indici

$$(W_2,(w_2,w_1)) \qquad\qquad (w_3,(W_1,w_1))$$

σ^K-unificano in $(w_3,(w_2,w_1))$, dato che

$$(W_2,w_3)\sigma = w_3 \qquad (w_2,W_1)\sigma = w_1 \qquad (w_1,w_1)\sigma = w_1;$$

infatti, in tutti i casi almeno uno dei due simboli è una costante. Gli indici

$$(W_3,(w_3,(W_1,w_1))) \qquad\qquad (W_4',(W_2,(w_2,w_1)))$$

σ^K-unificano, dato che le teste sono due variabili con $W_4' \in \mathrm{Den}$, inoltre

$$((w_3,(W_1,w_1)),(W_2,(w_2,w_1)))\sigma^K \ .$$

Per K non abbiamo bisogno di definire una unificazione alta composta dato che k è caratterizzata da un unico assioma modale, inoltre l'unificazione alta e quella bassa coincidono.

$$(i,k)\sigma_K = (i,k)\sigma^K \qquad (\sigma_K)$$

Intuitivamente: gli indici denotano mondi possibili con i "percorsi di accessibilità" attraverso i quali è possibile arrivarvi. Come abbiamo visto, K non è caratterizzata da nessuna relazione di accessibilità particolare, quindi si può dire che non esistono "scorciatoie" per passare da un mondo all'altro, cosa che viene simulata dalla σ_K-unificazione. Essa infatti controlla, passo a passo, che due percorsi siano lo stesso percorso; inoltre si assicura, con la condizione che almeno una delle due teste sia una costante, che non arriviamo in un vicolo cieco, dato che la denotazione di due indici non ristretti può essere vuota: le assunzioni sul modello non garantiscono che ogni mondo "veda" degli altri mondi.

Si noti che l'identità di due indici non è una condizione sufficiente per garantire la loro σ_K-unificazione. Infatti, per esempio, (W_1,w_1) non σ^K-unifica con se stesso, dato che (W_1, W_1) non contiene nessuna costante. Questo fatto prova inoltre che nessuna formula della forma $\Diamond A$ è un teorema di K:

1. $F\Diamond(A \to A)$	w_1
2. $FA \to A$	(W_1, w_1)
3. TA	(W_1, w_1)
4. FA	(W_1, w_1)

Esempio 3.8. Forniamo di seguito la dimostrazione della formula $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

1. $F\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	w_1
2. $T\Box(A \to B)$	w_1
3. $F\Box A \to \Box B$	w_1
4. $T(A \to B)$	(W_1, w_1)
5. $T\Box A$	w_1
6. $F\Box B$	w_1
7. TA	(W_2, w_1)
8. FB	(w_2, w_1)
9. FA	(w_2, w_1)
10. $\times$	(w_2, w_1)

I passi (1)–(8) non comportano particolari difficoltà, corrispondendo ai passi ottenibili con le usuali regole di espansione dei tableaux. Notiamo a questo punto che l'unica formula che non abbiamo ancora analizzato è una formula di tipo β, (4), e abbiamo le coniugate delle sue componenti ((7) e (8)); per poter applicare una regola β dobbiamo controllare che i loro indici σ_K-unificano con l'indice di (4). L'unificazione degli indici di (4) e (7) fallisce, proviamo quindi a vedere se la seconda coppia di indici σ_K-unifica. Ciò avviene e possiamo così applicare la regola β al passo (9). A questo punto tutte le formule sono state analizzate; notiamo che ci sono due formule complementari, (7) e (9); per poter inferire la chiusura dell'albero dobbiamo controllare che i loro indici σ_K-unifichino. I loro indici σ_K-unificano e pertanto l'albero è chiuso.

La logica D

D è ottenuta da K aggiungendo l'assioma **D** che, come abbiamo visto, comporta la serialità del modello. Dobbiamo pertanto definire una unificazione che, in regime di serialità, ci dica quando l'intersezione delle denotazioni di due indici non è vuota.

$$(i,k)\sigma^D = (i,k)\sigma \qquad (\sigma^D)$$

È facile verificare che la σ^K-unificazione (e quindi σ_K) è una restrizione della σ^D-unificazione, pertanto la σ^{KD} coincide con σ^D e, in virtù di questa proprietà abbiamo[16]:

$$(i,k)\sigma_D = \begin{cases} (i,k)\sigma^D \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^D \end{cases} \qquad (\sigma_D)$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_D$.

Esempio 3.9. Gli indici

$$i = (w_2, (W_2, w_1)) \qquad\qquad j = (W_3, (W_1, w_1))$$

σ_D-unificano su

$$(w_2, (W_1', w_1)) = \rho(i) = \rho(j)$$

con la sostituzione

$$\begin{aligned} \rho = & W_1 \mapsto W_1, \\ & W_2 \mapsto W_1, \\ & W_3 \mapsto w_2 \ . \end{aligned}$$

Possiamo ripetere per D la spiegazione intuitiva dell'unificazione data per K, tenendo comunque presente che non avremo mai "vicoli ciechi" data la serialità del modello e, quindi, possiamo sempre unificare due variabili[17].

Esempio 3.10. Forniamo di seguito la dimostrazione dell'assioma **D**.

1. $F\Box A \rightarrow \Diamond A$	w_1
2. $T\Box A$	w_1
3. $F\Diamond A$	w_1
4. TA	(W_1, w_1)
5. FA	(W_2, w_1)
6. $\times$	(W_2, w_1)

La σ_D-chiusura del ramo segue immediatamente da (4) e (5) che sono formule σ_D-complementari, in quanto i loro indici σ_D-unificano.

[16] Per tutte le KD logiche considereremo la σ^K-unificazione inclusa nella σ^D-unificazione e pertanto la ometteremo.

[17] Per la stessa ragione tralasceremo di apporre $'$ ai simboli di mondo variabile che compaiono in indici che sono il risultato di σ_L, per le logiche L che contengono D.

La logica T

T è ottenuta da K aggiungendo l'assioma **T** che caratterizza semanticamente la riflessività. Si tratterà quindi di definire un'unificazione appropriata a simulare tale relazione. Come è noto, la riflessività implica la serialità; ci serviremo quindi di σ^D come unificazione base.

$$(i,k)\sigma^T = \begin{cases} (s^{l(k)}(i),k)\sigma & l(i) > l(k), \text{ e} \\ & \forall m \geq l(k), (i^m, h(k))\sigma = (h(i), h(k))\sigma \\ (i, s^{l(i)}(k))\sigma & l(k) > l(i), \text{ e} \\ & \forall m \geq l(i), (h(i), k^m)\sigma = (h(i), h(k))\sigma \end{cases} \qquad (\sigma^T)$$

su questa base siamo in grado di definire

$$(i,k)\sigma^{DT} = \begin{cases} (i,k)\sigma^D & l(i) = l(k) \\ (i,k)\sigma^T & l(i) \neq l(k) \end{cases} \qquad (\sigma^{DT})$$

In accordo con la definizione 3.17 l'unificazione per la logica T è:

$$(i,k)\sigma_T = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DT} \\ (i,k)\sigma^{DT} \end{cases} \qquad (\sigma_T)$$

dove $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_T$.

σ_T intende simulare la riflessività verificando che tutti i mondi, in una particolare sequenza all'interno di un indice (o parte di esso), siano "riducibili" a un singolo mondo: il mondo denotato dall'indice (o parte di esso) con cui il primo indice deve unificare.

Esempio 3.11. Gli indici

$$i = (w_3, (W_1, w_1))) \qquad\qquad k = (w_3, (W_2, (w_2, w_1)))$$

σ_T-unificano in $(w_3, (w_2, w_1))$, dato che

$$((W_1, w_1), (w_2, w_1))\sigma^D \qquad\qquad (W_2, w_3)\sigma = (w_3, w_3)\sigma \ .$$

Si può spiegare intuitivamente il risultato appena mostrato come segue: w_3 è uno dei mondi visibili da (w_2, w_1), ma ogni mondo visibile da quest'ultimo accede a w_3; possiamo quindi, in virtù della riflessività, ridurre i due passi a w_3 a un singolo passo.

Si noti che è possibile ottenere lo stesso risultato in maniera differente, con una più cospicua partecipazione della riflessività, dato che $(c^2(i), c^3(k))\sigma^D$ con

$$w_0 = (w_2, w_1) = ((W_1, w_1), (W_2, (w_2, w_1))\sigma_T \; ;$$

infatti

$$(w_1, w_1)\sigma^D \qquad\qquad (W_1, W_2)\sigma = (W_1, w_2)\sigma = w_2 \; .$$

Intuitivamente, il mondo w_3 è accessibile via il percorso denotato da $s(k) = (W_2, (w_2, w_1))$ che, dopo l'"eliminazione" di W_2, risulta denotare lo stesso mondo denotato da $s(i)$. Il passo da w_2 a W_2 è irrilevante in virtù della riflessività: w_2 è uno tra tutti i mondi accessibili da se stesso; pertanto possiamo sceglierlo come rappresentante di tale insieme.

Esempio 3.12. Forniamo ora una dimostrazione dell'assioma **T**:

1. $F\Box A \rightarrow A$	w_1
2. $T\Box A$	w_1
3. FA	w_1
4. A	(W_1, w_1)
5. $\times$	w_1

La σ_T-chiusura segue immediatamente dalla σ_T-complementarietà di (3) e (4), dato che i loro indici σ_T-unificano.

Le logiche $K4$, $D4$, $S4$

Tratteremo ora la transitività, che è la condizione semantica sulla relazione di accessibilità corrispondente all'assioma **4**. Le logiche qui studiate sono ottenute rispettivamente da K, D e T con l'aggiunta di tale assioma. Definiremo ora un'unificazione corrispondente alla transitività:

$$(i,k)\sigma^4 = \begin{cases} c^{l(i)}(k) & l(k) > l(i), h(i) \in \Phi_V \text{ e} \\ & w_0 = (i, s^{l(i)}(k))\sigma \\ c^{l(k)}(i) & l(i) > l(k), h(k) \in \Phi_V \text{ e} \\ & w_0 = (s^{l(k)}(i), k)\sigma \end{cases} \qquad (\sigma^4)$$

Questa unificazione simula la transitività verificando che l'indice più corto unifichi con un segmento del più lungo, vale a dire che il più corto "identifichi" un mondo nel percorso denotato dall'altro. Inoltre il più corto denota un insieme di mondi: tutti i mondi accessibili dal mondo denotato dal suo segmento. In base alla definizione di unificazione anche il segmento coincide con un mondo del percorso dell'indice più lungo. Per la transitività ogni mondo visto da un mondo visto a sua volta da un altro è visto da quest'ultimo; pertanto possiamo rendere esplicito il percorso (i mondi) eccedente nel più lungo come l'insieme dei mondi visti dal segmento del più corto.

Esempio 3.13. Gli indici

$$i = (W_3, (w_2, w_1)) \qquad\qquad k = (w_5, (w_4, (w_3, (W_2, w_1))))$$

σ^4-unificano in $(w_5, (w_4, (w_3, (w_2, w_1))))$ dato che $s^{l(i)}(k) = (w_3, (W_2, w_1))$ e i σ-unificano.

Dopo aver visto come trattare la transitività, possiamo definire le varie $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$-unificazioni per le logiche in questione. Iniziamo con la σ^{K4}.

La transitività, a differenza della riflessività, non implica la serialità; pertanto, dovremo imporre delle condizioni che ci garantiscano che la denotazione degli indici variabili non è vuota. Queste condizioni verranno imposte in base al comportamento di σ^4, alle proprietà semantiche della transitività e alla struttura degli indici.

$$(i,k)\sigma^{K4} = \begin{cases} (i,k)\sigma^K & l(i) = l(k) \\ (i,k)\sigma^4 & l(i) > l(k), (s^{l(k)}(i), k)\sigma^K \text{ e} \\ & \forall n \geq l(k), h^n(i) \in \text{Den}, \text{ o} \\ & s^{l(k)}(i) \text{ o } k \text{ è } p,q\text{-convergente} \\ (i,k)\sigma^4 & l(k) > l(i), (i, s^{l(i)}(k))\sigma^K \text{ e} \\ & \forall n \geq l(i), h^n(k) \in \text{Den}, \text{ o} \\ & i \text{ o } s^{l(i)}(k) \text{ è } p,q\text{-convergente} \end{cases} \qquad (\sigma^{K4})$$

Le condizioni chiamate in causa sono, da un lato, la proprietà di essere ground da parte degli appropriati controsegmenti, che non necessita di particolari spiegazioni, e, dall'altro, la p,q-convergenza di uno degli indici che servono a determinare w_0. Un indice convergente, come ad esempio $i = (w_3, (w_2, (W_1, w_1)))$, ci informa che un dato mondo è visto da tutti gli altri mondi; nel caso di i il mondo denotato da w_2 è visto da tutti i mondi accessibili da w_1. In regime di transitività i mondi visti in un particolare indice, rispetto a un particolare mondo, sono tutti quelli che appaiono nel controsegmento dell'indice che ha come origine il segmento denotante il mondo in questione. Quello che resta da mostrare è che w_1 vede effettivamente qualche mondo, ma questo viene garantito da σ^K.

Esempio 3.14. Gli indici

$$i = (W_4, (w_4, (W_3, (W_2, w_1)))) \qquad k = (W_1, (w_3, (w_2, w_1)))$$

σ^{K4}-unificano. Infatti $(w_4, (W_3, (W_2, w_1)))$ e k σ^K-unificano e il primo è $2,1$-convergente. w_4 denota un mondo visto da un qualunque mondo visto a sua volta da un qualunque mondo accessibile da w_1; le denotazioni di W_1, W_2 e W_3 non sono vuote, contenendo rispettivamente w_4, w_2 e w_3. Inoltre, per la transitività, $W_1 \subseteq W_3 \subseteq W_2$. Dobbiamo assicurarci che W_4 non sia vuoto; ciò segue dal fatto che w_4 vede se stesso. Per stabilire quest'ultimo fatto basta notare che sia W_2 e W_3 contengono w_4, ma W_3 denota i mondi accessibili da un dato mondo in W_2. Il risultato della σ^{K4}-unificazione tra i e k è quindi $(W_4, (w_4, (w_3, (w_2, w_1))))$.

Passiamo ora a mostrare la $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$-unificazione per $D4$ e $S4$.

$$(i,k)\sigma^{D4} = \begin{cases} (i,k)\sigma^D & l(i) = l(k) \\ (i,k)\sigma^4 & l(i) \neq l(k) \end{cases} \tag{σ^{D4}}$$

$$(i,k)\sigma^{DT4} = \begin{cases} (i,k)\sigma^D & l(i) = l(k) \\ (i,k)\sigma^T & h(\text{shortest}\{i,k\}) \in \Phi_C \\ (i,k)\sigma^4 & h(\text{shortest}\{i,k\}) \in \Phi_V \end{cases} \tag{σ^{DT4}}$$

Queste ultime sono la combinazione delle σ^A-unificazioni corrispondenti agli assiomi caratteristici.

A questo punto le σ_L-unificazioni seguono dalla definizione 3.17

$$(i,k)\sigma_{K4} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{K4} \\ (i,k)\sigma^{K4} \end{cases} \tag{σ_{K4}}$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{K4}$.

Esempio 3.15. Gli indici

$$i = (W_2, (w_3, (w_2, w_1))) \qquad k = (w_5, (w_4, (W_1, w_1)))$$

σ_{K4}-unificano; infatti $(c^3(i), c^2(k))\sigma^{K4}$ dato che

$$c^3(i) = (W_2, w_0) \qquad\qquad c^2(k) = (w_5, (w_4, w_0)) \ ;$$

inoltre

$$s^3(i) = (w_3, (w_2, w_1)) \qquad\qquad s^2(k) = (W_1, w_1)$$

σ_{K4}-unificano dato che i due segmenti σ^{K4}-unificano e quindi σ_{K4}-unificano in $(w_3, (w_2, w_1)$. Dunque

$$(i, k)\sigma_{K4} = (w_5, (w_4, (w_3, (w_2, w_1))))$$

Per la σ_{K4}-unificazione la condizione di convergenza è richiesta o per $s^n(i)$ o per $s^m(k)$ presi singolarmente e non per la loro unificazione. È possibile infatti che uno dei due sia convergente ma non lo sia w_0: infatti gli indici

$$(W_2, (w_2, (W_1, w_1))) \qquad\qquad (W_4, (W_3, (w_3, w_1)))$$

sono entrambi convergenti ma la loro σ_{K4}-unificazione $(w_4, (w_2, (w_3, w_1)))$ non lo è. Inoltre, data la ricorsività dell'unificazione, dovremo verificare la stessa proprietà anche per l'origine di w_0 e così via. Si noti che la convergenza di una unificazione maggiormente nidificata implica la convergenza di tutte quelle meno nidificate ma non viceversa, dato che, in base alla definizione stessa di convergenza (definizione 3.11), un indice è convergente se lo è un suo segmento. Come abbiamo appena visto, una unificazione può nascondere una convergenza, il che avviene principalmente quando, in una unificazione, siamo costretti a spezzare l'indice convergente in due parti proprio nel punto da cui deduciamo la convergenza.

Analizziamo il seguente caso: i due indici

$$i = (W_1, (w_4, (w_3, (w_2, w_1)))) \qquad k = (W_4, (w_5, (W_3, (W_2, w_1))))$$

σ_{K4}-unificano. Vediamone il perché. I due indici chiaramente non σ^K- nè σ^4-unificano, quindi non σ^{K4}-unificano e la loro unificazione risulta dalla combinazione ricorsiva di σ^{K4}-unificazioni. Infatti

$$(w_4, (w_3, (w_2, w_1))) \qquad\qquad (W_3, (W_2, w_1))$$

σ^{K4}-unificano in

$$w_0 = (w_4, (w_3, (w_2, w_1))) \ ,$$

ma quest'ultimo indice non è convergente, così come non lo sono (W_1, w_0) e $(W_4, (w_5, w_0))$. Sembrerebbe quindi che non possiamo unificare i contro-segmenti per la loro non convergenza; tuttavia $(w_5, (W_3, (W_2, w_1)))$ è convergente e questo ci assicura che w_2 accede a se stesso, rendendo non vuota la denotazione di W_5 e permettendoci così l'unificazione dei due indici.

Le unificazioni per le altre due logiche presentano meno problemi a motivo della loro serialità.

$$(i,k)\sigma_{D4} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{D4} \\ (i,k)\sigma^{D4} \end{cases} \qquad (\sigma_{D4})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{D4}$.

La σ_{D4} include la σ_{K4} dato che quest'ultima ha la stessa struttura della prima ma con delle ulteriori restrizioni. Pertanto ogni coppia di indici che σ_{K4}-unifica σ_{D4}-unifica ma non viceversa: ad esempio gli indici $(W_2, (w_2, w_1))$ e (W_1, w_1) σ_{D4}-unificano ma non σ_{K4}-unificano.

$$(i,k)\sigma_{S4} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DT4} \\ (i,k)\sigma^{DT4} \end{cases} \qquad (\sigma_{S4})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{S4}$.

Esempio 3.16. In questo esempio forniamo una coppia di indici che σ_{S4}-unificano ma non σ_{D4}-unificano. Gli indici in questione sono:

$$i = (W_2, (w_2, (W_1, w_1))) \qquad\qquad k = (w_4, (w_3, (w_2, w_1)))\ .$$

È facile notare che qualunque espansione di (W_1, w_1) risulta inutile al fine di una σ_{D4}-unificazione per la mancanza di variabili in k. L'unico elemento di k che può unificare con l'occorrenza w_2 in i è w_2 stesso, ma in qualunque tentativo di σ_{D4}-unificazione questa occorrenza sarebbe associata a W_1. L'unica maniera per unificare i due indici è quella di vedere se è possibile "contrarre" $(w_2, (W_1, w_1))$ in (W_2, w_1) e quindi espandere W_2. La contrazione risulta da σ^{DT} e l'espansione da σ^4. Esistono due possibilità per σ_{S4}-unificare i e k che conducono allo stesso risultato. Nel primo caso avremo le seguenti unificazioni:

$$((W_2, w_0), (w_4, (w_3, w_0)))\sigma^4$$

con

$$w_0 = ((w_2, w_0'), (w_2, w_0'))\sigma_{S4}$$

dove

$$w'_0 = ((W_1, w_1), w_1)\sigma_{S4} \ ;$$

in particolare w_0 è ottenuto tramite una σ^D-unificazione e w'_0 tramite una σ^T. Nel secondo caso avremo:

$$((W_2, w_0), (w_4, (w_3, w_0)))\sigma^4$$

dove

$$w_0 = ((w_2, (W_1, w_1), (w_2, w_1))\sigma_{S4}$$

ottenuta via una σ^T-unificazione.

Esempio 3.17. Forniamo ora la dimostrazione in $K4$ dell'assioma **4**.

1. $F\Box A \to \Box\Box A$	w_1
2. $T\Box A$	w_1
3. $F\Box\Box A$	w_1
4. TA	(W_1, w_1)
5. $F\Box A$	(w_2, w_1)
6. FA	$(w_3, (w_2, w_1))$
7. $\times$	$(w_3, (w_2, w_1))$

La σ_{K4}-chiusura segue immediatamente dalla σ_{K4}-complementarietà di (4) e (6). Infatti i loro indici σ_{K4}-unificano banalmente per σ^4 rendendo in questo modo (4) e (6) anche σ_{D4}- e σ_{S4}-complementari.

Le logiche KB, DB, B

In questo paragrafo esamineremo le varie unificazioni per trattare la simmetria; le unificazioni in questione ci permetteranno di caratterizzare le logiche KB, DB e B.

$$(i,k)\sigma^B = \begin{cases} (s^{l(i)-2n}(i), k)\sigma & \text{se } h(i) \in \Phi_V \text{ e} \\ & (h(i), h(k))\sigma = (h^{l(i)-2n}(i), h(k))\sigma, 1 \le n \le V \\ (i, s^{l(k)-2n}(k))\sigma & \text{se } h(k) \in \Phi_V \text{ e} \\ & (h(i), h(k))\sigma = (h(i), h^{l(k)-2n}(k))\sigma, 1 \le n \le V \end{cases} \tag{σ^B}$$

Dove $V = l(i) - m$, con m tale che $\forall p, m \le p \le l(i), h^p(i) \in \Phi_V$.

L'idea base della σ^B-unificazione consiste nel confrontare due simboli di mondo distanti fra loro un numero pari di passi. Indici come $(W_1, (w_2, w_1))$ e w_1 costituiscono una semplice istanza di tale unificazione; infatti, la si può spiegare verificando, dato un certo mondo all'interno di un indice, se i(l) mondi(o) da cui si accede al mondo dato e i(l) mondi(o) visti(o) da quest'ultimo coincidono. In regime di simmetria il mondo w_1 è uno dei mondi visti da w_2 (W_1), dato che esso stesso vede w_2.

Dopo aver esaminato l'idea di fondo della unificazione per la simmetria passiamo ad esaminare la sua implementazione. Per prima cosa dobbiamo tener presente che i passaggi di simmetria possono essere reiterati. Sono possibili due differenti tipi di reiterazione: il primo consiste nel fare prima un "passo in avanti" e poi un "passo all'indietro" e quindi ripetere questo procedimento più volte, oppure si possono fare n passi in avanti e quindi tornare indietro di altrettanti passi. Un passo in avanti può venire formalizzato come un mondo costante, mentre un passo all'indietro è simbolizzato da una variabile. Si ricordi che una variabile viene interpretata come un insieme di mondi: l'insieme di mondi visti da un particolare mondo, tra cui, tra l'altro tutti i mondi che vedono quest'ultimo. Il processo di reiterazione n passi avanti n passi indietro viene implementato nella σ^B-unificazione appena definita, mentre l'altra reiterazione viene colta dalle varie σ_{XB}-unificazione che ci apprestiamo a definire[18].

Abbiamo appena visto il comportamento e le motivazioni di σ^B. Passiamo ora a definire le varie $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$ per le logiche simmetriche considerate nel presente paragrafo.

La simmetria non implica la serialità, pertanto dobbiamo fornire una condizione simile alla convergenza di $K4$ per determinare quando le variabili sono denotanti. Tuttavia è facile mostrare che la simmetria implica la quasi

[18] I due tipi di cicli che abbiamo appena descritto corrispondono alle formule $A \to \Box^k \Diamond^k A$ e $A \to (\Box\Diamond)^k A$ che sono teoremi di tutte le B-logiche. Tuttavia i due cicli hanno cause differenti il primo è dovuto alla necessitazione e il secondo alla forma stessa dell'assioma **B** in cui l'antecedente risulta essere parte del conseguente. Infatti nel primo caso basta prendere $B = \Diamond A$ quindi avremo la seguente istanza di **B** $\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$, a cui possiamo applicare la necessitazione ottenendo via PC e **K** $\Box\Diamond A \to (\Box\Diamond)^2 A$, abbiamo anche $A \to \Box\Diamond A$, quindi per l'assioma A2 abbiamo $A \to (\Box\Diamond)^2 A$. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento fino a ottenere il risultato voluto. Per l'altra formula invece basta porre $B = \Box\Diamond A$, e applicare l'assioma A2 come nell'altro caso.

serialità[19]. La quasi serialità garantisce che nessuna catena di mondi contiene un punto terminale, quindi se possiamo fare il primo passo potremmo sempre continuare a farne altri. L'unificazione che corrisponde alla quasi serialità è la seguente:

$$(i,k)\sigma^O = (c^2(i), c^2(k))\sigma^D \tag{σ^O}$$

con $w_0 = (s^2(i), s^2(i))\sigma^K$.

In base alla definizione appena data coppie di indici come

$$(W_1, (w_2, w_1)) \qquad\qquad (W_3, (W_2, w_1))$$

σ^O-ma non σ^K-unificano.

$$(i,k)\sigma^{KB} = \begin{cases} (i,k)\sigma^B & h^2(i) \text{ o } h^2(k) \in \Phi_C \\ (i,k)\sigma^O \end{cases} \tag{σ^{KB}}$$

D'altra parte se un mondo, w_1, è visto da un altro mondo, diciamo w_2, l'insieme di mondi visti dal primo sicuramente non è vuoto, dato che contiene almeno il mondo w_2; inoltre ogni mondo visto da w_1 vedrà lo stesso w_1, rendendo non vuoto l'insieme di mondi che vede, e così via.

$$(i,k)\sigma^{DB} = \begin{cases} (i,k)\sigma^B \\ (i,k)\sigma^D \end{cases} \tag{σ^{DB}}$$

$$(i,k)\sigma^{DTB} = \begin{cases} (i,k)\sigma^B \\ (i,k)\sigma^D \\ (i,k)\sigma^T \end{cases} \tag{σ^{DTB}}$$

Esempio 3.18. Le unificazioni appena definite ci consentono di trattare alcuni casi interessanti, ma non altri: gli indici

$$i = (W_3, (W_2, (w_2, (W_1, w_1)))) \qquad\qquad k = (W_4, (w_3, w_1)) \tag{3.5}$$

σ^{KB}-unificano dato che i contiene due variabili successive e quindi vengono date due possibilità di fare passi indietro: o un passo indietro rispetto a $b(i)$ o due passi indietro rispetto a $b(b(i))$; la seconda alternativa richiederebbe la σ-unificazione di $w_1 = s^{l(i)-2n}(i), n = 2$ e k che fallisce, mentre la prima

[19]Una relazione R è quasi seriale quando $\forall x \forall y(xRy \to \exists z yRz)$.

comporta la σ-unificazione di $(w_2, (W_1, w_1))$ e k, che ha successo. Tuttavia le unificazioni alte non ci permettono di trattare con casi del genere di

$$i = (W_3, (w_4, (W_2, (w_3, (W_1, (w_2, w_1)))))) \qquad k = w_1 \tag{3.6}$$

Le unificazioni alte si prendono cura di casi di ricorsione del primo tipo mentre le unificazioni basse di quelli del secondo (cfr. nota 18).

$$(i, k)\sigma_{KB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{KB} \\ (i, k)\sigma^{KB} \end{cases} \tag{σ_{KB}}$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{KB}$.

Esempio 3.19. Nell'esempio precedente abbiamo visto due coppie di indici. La prima (3.5) σ^{KB}-unificava, e quindi a fortiori σ_{KB}-unifica, mentre la seconda (3.6) non σ^{KB}-unificava. In questo esempio mostriamo una differente σ_{KB}-unificazione per la prima coppia e una per la seconda applicando in maniera ricorsiva σ_{KB}. Per la prima coppia notiamo che $((W_4, (w_3, w_1)), w_1)\sigma_{KB}$; poniamo il risultato di tale unificazione uguale a w_0, quindi

$$c^1((W_3, (W_2, (w_2, (W_1, w_1))))) = (W_3, (W_2, (w_2, (W_1, w_0))))$$
$$c^3((W_4, (w_3, w_1)))) = w_0$$

a questo punto $s^{l(c^3(i))-2n}(c^3(i)) = w_0$ per $n = 2$, ma $(W_3, w_0)\sigma = (w_0, w_0)\sigma$, pertanto i due indici unificano in w_1. La seconda coppia di indici σ_{KB}-unifica, infatti possiamo scomporre l'unificazione in questo modo

$$((W_3, (w_4, w_0)), w_1)\sigma^{KB}$$

dove

$$w_0 = ((W_2, (w_2, w_0')), w_1)\sigma_{KB}$$

ma a sua volta

$$w_0' = ((W_1, (w_2, w_1)), w_1)\sigma_{KB}$$

dato che

$$((W_1, (w_2, w_1)), w_1)\sigma^{KB} = w_1$$

per una semplice σ^B-unificazione.

La prima coppia di indici corrisponde alla formula $A \rightarrow \Box^n \Diamond^n A$, e la coppia di indici in 3.6 corrisponde a $A \rightarrow (\Box\Diamond)^k A$, come dimostra il seguente albero

$$\begin{array}{lr}
F A \rightarrow (\Box\Diamond)^k A & w_1 \\
T A & w_1 \\
F (\Box\Diamond)^k A & w_1 \\
F \Diamond(\Box\Diamond)^{k-1} A & (w_2, w_1) \\
F (\Box\Diamond)^{k-1} A & (W_1, (w_2, w_1)) \\
 & \vdots \\
F A & (W_k, (w_{k+1}, (\cdots, (W_1, (w_2, w_1)))) \\
\times & w_1
\end{array}$$

In questo albero abbiamo che gli indici delle formule complementari σ_{KB}-unificano in quanto possiamo ripetere k volte il ragionamento che abbiamo fatto nell'esempio 3.19 a proposito degli indici in 3.6.

Forniamo ora l'unificazione che caratterizza DB

$$(i,k)\sigma_{DB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DB} \\ (i,k)\sigma^{DB} \end{cases} \qquad (\sigma_{DB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{DB}$.

Esempio 3.20. Gli indici

$$(W_2, (w_2, (W_1, w_1))) \qquad\qquad (W_3, (w_3, (W_1, w_1)))$$

σ_{DB}- ma non σ_{KB}-unificano dato che entrambi i segmenti di lunghezza due sono non ristretti. In questo caso scomponiamo l'unificazione come segue:

$$((W_3, (w_3, w_0)), w_0)\sigma^{DB}$$

con

$$w_0 = ((W_2, (w_2, (W_1, w_1)), (W_1, w_1))\sigma_{DB} \ .$$

La seguente è l'unificazione che caratterizza B.

$$(i,k)\sigma_{B} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DTB} \\ (i,k)\sigma^{DTB} \end{cases} \qquad (\sigma_{B})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_B$.

Esempio 3.21. In questo esempio mostriamo una applicazione di σ_B. Gli indici

$$(W_3, (w_3, (W_2, (w_2, w_1)))) \qquad\qquad (W_1, w_1)$$

σ_B-unificano dal momento che

$$((W_3, (w_3, w_0)), w_0)\sigma^{DTB}$$

in quanto σ^B-unificano,

$$w_0 = ((W_2, (w_2, w_1)), (W_1, w_1))\sigma_B$$

dato che i due segmenti σ^T-unificano.

Esempio 3.22. La seguente è una dimostrazione in KB dell'assioma caratteristico **B**.

1. $FA \to \Box\Diamond A$	w_1
2. TA	w_1
3. $F\Box\Diamond A$	w_1
4. $F\Diamond A$	(w_2, w_1)
5. FA	$(W_1, (w_2, w_1))$
6. $\times$	w_1

La σ_{KB}-chiusura segue immediatamente dalla σ_{KB}-complementarietà di (2) e (6) dato che i loro indici σ_{KB}-unificano.

Le logiche $K5$, $D5$

Anche per queste logiche forniamo una unificazione che corrisponde all'assioma caratteristico **5**, ma, a differenza delle altre logiche, definiremo le corrispondenti unificazioni senza passare per σ^{K5} e σ^{D5} in quanto queste corrispondono alle rispettive σ_L. Come abbiamo visto la relazione di accessibilità corrispondente all'assioma **5** è l'euclideicità, vale a dire che se un mondo vede due mondi distinti questi saranno in mutua relazione di accessibilità. Se $w_1 R w_2$ e $w_1 R w_3$ allora $w_2 R w_3$ e $w_3 R w_2$; supponiamo inoltre che $w_2 R w_4$ ma per l'euclideicità avremo $w_3 R w_4$ e $w_4 R w_3$. In base a questa caratteristica definiamo l'unificazione per **5**.

$$(i,k)\sigma^5 = \begin{cases} ((h(i),h(k))\sigma; c^1(s^2(i))) & l(i) > 2, l(k) > 1, h(i) \in \Phi_V, \text{ o} \\ & h(i) = h(k) \in \Phi_C \\ (i,k)\sigma & l(i) = l(k) = 2 \\ ((h(i),h(k))\sigma; c^1(s^2(i))) & l(k) > 2, l(i) > 1, h(k) \in \Phi_V, \text{ o} \\ & h(i) = h(k) \in \Phi_C \end{cases} \tag{σ^5}$$

dove $w_0 = (s^1(i), s^1(k))\sigma$. Le σ_L saranno quindi

$$(i,k)\sigma_{K5} = \begin{cases} (i,k)\sigma^5 & h^2(i) \text{ o } h^2(k) \in \text{Den} \\ (i,k)\sigma^O \end{cases} \tag{σ_{K5}}$$

Esempio 3.23. Gli indici $(W_2,(w_2,w_1))$ e (w_2,w_1) σ_{K5}-unificano in (w_2,w_1); gli indici $i = (W_2,(W_1,w_1))$ e $k = (w_2,w_1)$ unificano in $(w_2,(W_1',w_1))$ e quest'ultimo σ_{K5}-unifica sia con i dato che $W_1' \in$ Den sia con k dato che hanno la stessa testa.

L'unificazione per $D5$ è la seguente

$$(i,k)\sigma_{D5} = \begin{cases} (i,k)\sigma^5 \\ (i,k)\sigma^D \end{cases} \tag{σ_{D5}}$$

Esempio 3.24. La seguente è una dimostrazione in $K5$ della formula $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.

1. $F\Diamond A \to \Box\Diamond A$	w_1
2. $T\Diamond A$	w_1
3. $F\Box\Diamond A$	w_1
4. TA	(w_2,w_1)
5. $F\Diamond A$	(w_3,w_1)
6. FA	$(W_1,(w_3,w_1))$
7. $\times$	$(w_2,(w_3,w_1))$

La σ_{K5}-chiusura segue immediatamente da (4) e (6) che sono σ_{K5}-complementari, in quanto i loro indici σ_{K5}-unificano in virtù di $(W_1,w_2)\sigma^K$ e $(w_1,w_1)\sigma^K$.

Le logiche $K45$, $D45$

Sebbene sia possibile definire le unificazioni per le logiche di questo paragrafo in conformità alle definizioni 3.16 e 3.17, a partire da σ^4 e σ^5 come loro semplice combinazione, preferiamo definirle in base alla loro particolare struttura semantica piuttosto che alla modularità sintattica a cui ci siamo rifatti finora.

$K45$ e $D45$ associano a ogni mondo una classe di equivalenza, la classe di equivalenza dei mondi visti da un particolare mondo — il mondo a cui la classe è associata. Per la transitività ogni mondo visto da un mondo in una classe di equivalenza appartiene a tale classe, dato che è visto dal mondo che determina la classe. In $K45$, per la mancanza della serialità, la classe associata a un particolare mondo può essere vuota; inoltre, per l'assenza della riflessività, il mondo che determina la classe può non appartenere a detta classe.

In base a queste proprietà semantiche definiamo la σ^{45} unificazioni come segue:

$$(i,k)\sigma^{45} = ((h(i),h(k))\sigma,(s^1(i),s^1(k))\sigma),\ l(i),l(k) > 1 \qquad (\sigma^{45})$$

da cui otteniamo[20]

$$(i,k)\sigma_{K45} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{45} & h^2(i) \text{ o } h^2(k) \in \text{Den} \\ (i,k)\sigma^K \end{cases} \qquad (\sigma_{K45})$$

dove la clausola $h^2(i)$ o $h^2(k) \in \Phi_C$ garantisce che la classe di equivalenza associata non è vuota.

$$(i,k)\sigma_{D45} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{45} \\ (i,k)\sigma^D \end{cases} \qquad (\sigma_{D45})$$

La clausola $(s^1(i),s^1(k))\sigma$ in σ^{45} sta a significare che gli indici si riferiscono alla stessa classe di equivalenza.

Esempio 3.25. Gli indici

$$(W_2,(w_2,w_1)) \qquad\qquad (W_3,(w_4,(w_3,w_1))$$

σ_{K45}- e σ_{D45}-unificano; infatti le loro teste, W_2 e W_3, unificano così come i loro segmenti di lunghezza uno, e inoltre i segmenti di lunghezza due, (w_2,w_1) e (w_3,w_1), sono ristretti. Viceversa,

$$(w_2,(W_2,w_1)) \qquad\qquad (W_3,(w_3,(W_1,w_1))$$

[20]Anche per queste logiche valgono le considerazioni riguardo le unificazioni che abbiamo fatto a proposito di $K45$ e $D45$.

σ^{D45}-unificano ma non σ^{K45}-unificano dato che i loro segmenti di lunghezza due non sono ristretti.

TEOREMA 3.1. *Se σ^{4*5} è l'unificazione ottenuta tramite la definizione 3.16 da σ^4 e da σ^5, allora $\forall i,k \in \Im (i,k)\sigma^{4*5} \Leftrightarrow (i,k)\sigma^{45}$. Inoltre se $(i,k)\sigma^{45} = l$ e $(i,k)\sigma^{4*5} = l'$, allora $(l,l')\sigma^{45} = (l,l')\sigma^{4*5} = l$.*

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che se $l(i), l(k) > 2$, allora se $(i,k)\sigma^4$ allora $(i,k)\sigma^5$, dato che σ^4 richiede che la testa del più corto, diciamo i, sia una variabile, quindi $(h(i), h(k))\sigma$, e che $(b(i), s^{l(b(i))}(k))\sigma$; da quest'ultima, per la definizione ricorsiva dell'unificazione, ricaviamo $(s^1(i), s^1(k))\sigma$, così abbiamo le condizioni richieste a due indici per σ^5-unificare. Un'analisi delle condizioni di σ^5 mostra che esse sono delle restrizioni di quelle di σ^{45}, che risultano tuttavia equivalenti quando le lunghezze degli indici sono maggiori di 2. Ci rimane da esaminare un ultimo caso, vale a dire quando $h(i) \in \Phi_V$, $h(k) \in \Phi_C$ e $l(i) = 2$. Ma in questo caso possiamo applicare σ^4.

La seconda proprietà enunciata nel teorema deriva immediatamente da quella appena dimostrata. $\square$

Come conseguenza immediata abbiamo che ogniqualvolta due indici σ^4- o σ_{K5}-unificano essi σ_{K45}-unificano; analogamente se i due indici σ_{D5}-unificano allora σ_{D45}-unificano.

La logica $K4B = K5B$

$K4B$ coincide con $K5B$ [21] e quindi contiene gli assiomi **4** e **B**. Essa pertanto risulta molto simile a $K45$ con, in più, le proprietà derivanti dalla simmetria. Le condizioni che caratterizzano $K4B$ comportano che ogni mondo appartiene alla classe di equivalenza a esso associata o che è un punto terminale.

Similmente a quanto abbiamo fatto per $K45$ e $D45$ definiamo una unificazione apposita per tale logica invece di combinare le varie unificazione per i vari assiomi. Per la peculiarità della logica definiamo cosa significa per due indici unificare dato un insieme di indici e non il concetto di σ_{K4B}-unificazione *tout court*.

Dato un insieme di indici $\mathcal{L}$ due indici $i,k \in \mathcal{L}$ σ_{4B}-unificano in $\mathcal{L}$ se:

$$(i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_{4B} = ((h(i),h(k))\sigma; (s^1(i), s^1(k))\sigma) \qquad (\sigma^{\mathcal{L}}_{4B})$$

[21] Si veda (CHELLAS 1980).

se e solo se $\exists j : j \in \mathcal{L}, h^2(j) \in \text{Den}$ e $(s^1(i), s^1(j))\sigma$ o $(s^1(k), s^1(j))\sigma$.

Di conseguenza avremo

$$(i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_{K4B} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_{4B} & l(i), l(k) \neq 1 \\ (i,k)\sigma_K & l(i) = l(k) = 1 \end{cases} \tag{$\sigma^{\mathcal{L}}_{K4B}$}$$

Esempio 3.26. Gli indici

$$i = (W_2, (W_1, (w_2, w_1))) \qquad\qquad k = (w_4, (w_3, w_1))$$

σ_{K4B}-unificano su (w_4, w_1) dato che $(W_2, w_4)\sigma$, $(w_1, w_1)\sigma$ e $h^2(i) = w_2 \in \text{Den}$. Gli indici (W_1, w_1) e w_1 da soli non σ_{K4B}-unificano, dato che non sappiamo se la classe di equivalenza associata a w_1 e vuota; tuttavia se aggiungiamo, per esempio, l'indice (w_2, w_1) allora i due indici unificano in w_1 dato che siamo sicuri che la classe associata a w_1 non è vuota e quindi che w_1 appartiene a tale classe.

1.	$F\Diamond\Diamond\Box\Box(A \to \Box B) \to (A \to \Box\Box\Box B)$	w_1
2.	$T\Diamond\Diamond\Box\Box(A \to \Box B)$	w_1
3.	$FA \to \Box\Box\Box B$	w_1
4.	$T\Diamond\Box\Box(A \to \Box B)$	(w_2, w_1)
5.	$T\Box\Box(A \to \Box B)$	$(w_3, (w_2, w_1))$
6.	$T\Box(A \to \Box B)$	$(W_1, (w_3, (w_2, w_1)))$
7.	$TA \to \Box B$	$(W_2, (W_1, (w_3, (w_2, w_1))))$
8.	TA	w_1
9.	$F\Box\Box\Box B$	w_1
10.	$F\Box\Box B$	(w_4, w_1)
11.	$F\Box B$	$(w_5, (w_4, w_1))$
12.	FB	$(w_6, (w_5, (w_4, w_1)))$
13.	$T\Box B$	w_1
14.	TB	(W_3, w_1)
15.	$\times$	(w_6, w_1)

È possibile dimostrare questa formula usando σ^B e σ^4, infatti gli indici di 7 e 8 σ^B-unificano in w_1, pertanto otteniamo $T\Box B, w_1$ e gli indici delle formule complementari in 12 e 14 σ^4-unificano permettendoci quindi di chiudere l'albero.

1.	$F\Diamond\Box\Box A \to \Box\Box A$	w_1
2.	$T\Diamond\Box\Box A$	w_1
3.	$F\Box\Box A$	w_1
4.	$T\Box\Box A$	(w_2, w_1)
5.	$T\Box A$	$(W_1, (w_2, w_1))$
6.	TA	$(W_2, (W_1, (w_2, w_1)))$
7.	$F\Box A$	(w_3, w_1)
8.	FA	$(w_4, (w_3, w_1))$
9.	$\times$	

Nella prima dimostrazione abbiamo usato due differenti unificazioni; nella seconda possiamo comporle con il metodo con cui abbiamo definito le unificazioni basse (definizione 3.17). Infatti gli indici di 6 e 8 oltre a σ_{K5}-unificare σ_{4B}-unificano come segue:

$$((W_2, w_0), (w_4, (w_3, w_0))\sigma^4$$

con

$$w_0 = ((W_1, (w_2, w_1)), w_1)\sigma^B \ .$$

Nella dimostrazione seguente dovremo fare un uso essenziale della unificazione definita rispetto a insieme di indici, dato che non abbiamo altri mezzi per determinare la chiusura dell'albero in questione.

1.	$FA \to (\Diamond B \to \Diamond A)$	w_1
2.	TA	w_1
3.	$F\Diamond B \to \Diamond A$	w_1
4.	$T\Diamond B$	w_1
5.	$F\Diamond A$	w_1
6.	TB	(w_2, w_1)
7.	FA	(W_1, w_1)
8.	$\times$	

La logica $S5$

È possibile caratterizzare semanticamente $S5$ in due differenti maniere: nella prima la relazione di accessibilità è una relazione di equivalenza, nella seconda la relazione di accessibilità è universale. Queste due caratterizzazioni risultano equivalenti se abbiamo un singolo operatore modale (con il suo duale) ma se abbiamo più modalità o configurazioni di mondi le formule valide differiscono. Tuttavia, se vogliamo controllare la validità di formule rispetto a $S5$ le due risultano equivalenti. Infatti, dato che usiamo un metodo per refutazione, cerchiamo di costruire un contromodello a partire da un singolo mondo e analizzeremo unicamente il modello generato a partire da questo (si ricordi che al fine della valutazione di una formula i mondi che vengono chiamati in causa sono tutti e soli quelli che appartengono al modello generato); ora i mondi che appartengono al modello generato sono in relazione di accessibilità con il mondo generante e quindi appartengono tutti alla stessa classe di equivalenza, ma la relazione tra gli elementi di una classe di equivalenza è una relazione universale.

Dopo aver esaminato le motivazioni per cui abbiamo due differenti rappresentazioni semantiche, forniamo le rispettive unificazioni.

$$(i,k)\sigma^{\equiv}_{S5} = ((h(i),h(k))\sigma;(s^1(i),s^1(k))\sigma) \qquad (\sigma^{\equiv}_{S5})$$

Per i modelli in cui R è una relazione di equivalenza e

$$(i,k)\sigma^{U}_{S5} = (h(i),h(k))\sigma \qquad (\sigma^{U}_{S5})$$

per i modelli in cui R è una relazione universale. Tuttavia σ^U_{S5} comporta o un cambiamento del formato degli indici, o un cambiamento del formato delle regole, infatti nel corso di una dimostrazione possiamo avere una formula del genere di $T\Box A, W_1$, dove W_1 è stato ottenuto mediante una unificazione, ma non possiamo applicare alcuna regola d'inferenza in quanto otterremo un'espressione che non è un indice, Pertanto o modifichiamo le regole come segue

$$\frac{\nu, i}{\nu_0, W_n}[W_n \text{ nuovo}] \qquad \frac{\pi, i}{\pi_0, w_n}[w_n \text{ nuovo}]$$

oppure consentiamo ad espressioni come (w_n, W_1) di essere indici.

Per i motivi che abbiamo appena esposto identificheremo σ_{S5} con $\sigma^{\equiv}_{S5}$

$$(i,k)\sigma_{S5} = (i,k)\sigma^{\equiv}_{S5} \qquad (\sigma_{S5})$$

Le logiche KF, DF

Queste logiche sono ottenute rispettivamente da K e D con l'aggiunta dell'assioma $\mathbf{F}=\Diamond A \rightarrow \Box A$, che caratterizza semanticamente la proprietà di una relazione di essere parzialmente funzionale[22]. KF identifica la classe di modelli in cui la relazione di accessibilità è una funzione parziale e DF quelli in cui la relazione è una funzione totale.

Le unificazioni per queste logiche sono:

$$(i,k)\sigma^F = \begin{cases} i & l(i) = l(k) = 2, h(i) \in \text{Den} \\ k & l(i) = l(k) = 2, h(k) \in \text{Den} \end{cases} \text{ con } s^1(i) = s^1(k) \qquad (\sigma^F)$$

Di conseguenza definiamo

$$(i,k)\sigma^{DF} = \begin{cases} (i,k)\sigma^F \\ (i,k)\sigma^D \end{cases} \qquad (\sigma^{DF})$$

Non abbiamo bisogno di σ^{KF} dato che è facile verificare che σ^F contiene implicitamente σ^K; infatti qualunque coppia di indici (k,i) e (j,i) σ^F-unifica se almeno uno dei due è ristretto e i è ground. Tuttavia, nella definizione ricorsiva di σ_{KF} chiediamo che i stesso sia il risultato di una σ^F-unificazione, ottenendo quindi che $((k',k),(j',j))\sigma^F$ se almeno uno di due è ristretto e i loro corpi σ^F-unificano, il che accade se almeno uno dei due è ristretto e a loro volta i loro corpi σ^F-unificano.

$$(i,k)\sigma_{KF} = \begin{cases} (c^{l(i)-1}(i), c^{l(k)-1}(k))\sigma^F \\ (i,k)\sigma^F \end{cases} \qquad (\sigma_{KF})$$

con $w_0 = (s^{l(i)-1}(i), s^{l(k)-1}(k))\sigma_{KF}$.

Per DF abbiamo

$$(i,k)\sigma_{DF} = \begin{cases} (c^{l(i)-1}(i), c^{l(k)-1}(k))\sigma^{DF} \\ (i,k)\sigma^{DF} \end{cases} \qquad (\sigma_{DF})$$

con $w_0 = (s^{l(i)-1}(i), s^{l(k)-1}(k))\sigma_{DF}$, che ci consente comunque di unificare due indici se sono della stessa lunghezza.

Mostriamo a titolo di esempio come derivare l'assioma **F**.

1. $F\Diamond A \to \Box A$	w_1
2. $T\Diamond A$	w_1
3. $F\Box A$	w_1
4. TA	(w_2, w_1)
5. FA	(w_3, w_1)
6. $\times$	(w_2, w_1)

[22]Una relazione è parzialmente funzionale se $\forall x,y,z(xRy \wedge xRz \to y = z)$.

La logica Verum

Così come KF e DF la logica $Verum$ non è contenuta in $S5$, ed è assiomatizzata come K più l'assioma **V**$=\Box A$. Semanticamente $Verum$ caratterizza la classe dei modelli in cui ogni punto è un punto terminale, vale a dire nessun mondo accede ad altri mondi. Utilizziamo questa caratteristica per formulare una regola d'inferenza, in particolare una regola di chiusura (regola Verum), che caratterizza la trattazione di questa logica via KEM.

$$\frac{X, i}{\times}[h(i) \in \Phi_C \text{ e } l(i) = 2] \tag{RV}$$

Perché possiamo inferire la chiusura di un ramo se nel ramo compare un indice ristretto di lunghezza 2? Semplicemente perché un siffatto indice afferma che esiste un mondo accessibile dal mondo corrispondente al mondo iniziale, contrariamente a quanto stabilito dalla semantica. Tuttavia potremmo aver bisogno di utilizzare delle regole che richiedono un'unificazione, ad esempio una regola β, quindi stabiliamo che l'unificazione per $Verum$ sia l'unificazione per K.

Mostriamo una derivazione dell'assioma **V**

$$\begin{array}{ll}
1.\ F\Box A & w_1 \\
2.\ FA & (w_2, w_1) \\
3.\ \times &
\end{array}$$

e una dimostrazione in cui facciamo uso di una unificazione

1. $FA \to ((A \to \Diamond B) \to C)$	w_1
2. TA	w_1
3. $F(A \to \Diamond B) \to C$	w_1
4. $TA \to \Diamond B$	w_1
5. FC	w_1
6. $T\Diamond B$	w_1
7. TB	(w_2, w_1)
8. $\times$	

6 è ottenuto da 2 e 4 tramite una β regola, e da 6 otteniamo l'indice contraddittorio tramite una π regola.

3.5.2 Logiche deontiche

In questa sezione analizzeremo alcune logiche deontiche. Nella prima parte consideriamo le logiche conosciute con il nome di sistemi di Smiley-Hanson[23], in particolare mostreremo come adattare le unificazioni esposte nel paragrafo 3.5.1 agli assiomi **M** e **UB**, corrispettivi deontici degli assiomi **T** e **B**. (Si tenga presente che molte dei sistemi di Smiley-Hanson sono la variante deontica delle logiche modali esposte nella sezione precedente.)

Logiche con l'assioma $\Box(\Box A \to A)$

L'assioma **M**$=\Box(\Box A \to A)$ caratterizza la classe di modelli in cui la relazione di accessibilità è quasi riflessiva[24].

Se interpretiamo la relazione di accessibilità come un'ordinamento dei mondi secondo il loro grado di perfezione deontica, vale a dire se xRy allora il mondo y è deonticamente migliore del mondo x, l'assioma **M** ha alcune conseguenza. Una di queste conseguenze è che ogni mondo deonticamente accessibile da un mondo dato è deonticamente perfetto, vale a dire che qui ogni obbligo è rispettato, ma questo comporta che un mondo in cui vi sono delle violazioni non può essere un mondo deonticamente perfetto, da cui si deduce che in una catena di mondi un mondo che ammette delle violazioni è il mondo deonticamente peggiore; tuttavia in alcuni casi non è detto che il mondo deonticamente peggiore sia il peggiore, basta pensare a sistemi

[23] Per una esposizione dei sistemi di Smiley-Hanson si veda (Åqvist 1985, Åqvist 1984).

[24] Una relazione è quasi riflessiva se $\forall x, y(xRy \to yRy)$, per la dimostrazione del teorema di completezza si veda (Åqvist 1985).

normativi con leggi ingiuste o inique, in cui potrebbe essere auspicabile che alcuni obblighi non venissero rispettati.

Le logiche OM, DM

OM e DM sono ottenuti rispettivamente da K e D con l'aggiunta dell'assioma **M**.

Semanticamente, OM è caratterizza dalla quasi riflessività, a cui corrispondono la seguenti unificazioni:

$$(i,k)\sigma^{OM} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{T} & \text{e } (s^2(i), s^2(k))\sigma^{O} \\ (i,k)\sigma^{O} \end{cases} \tag{σ^{OM}}$$

che ci consente di definire

$$(i,k)\sigma_{OM} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{OM} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{T} & n, m > 2 \\ (i,k)\sigma^{OM} \end{cases} \tag{σ_{OM}}$$

$w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{OM}$.

Si noti in primo luogo che la quasi riflessività implica la quasi serialità, per cui possiamo usare la σ^{O} al posto della σ^{K}; in secondo luogo utilizziamo la σ^{T} nella definizione della σ_{OM} per controsegmento di lunghezza superiore a 2; questo è possibile dato che per un qualunque mondo accessibile in almeno 2 passi da un altro mondo è riflessivo, cioè vede se stesso. In maniera simile otteniamo

$$(i,k)\sigma^{DM} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{T} & \text{e } (s^2(i), s^2(k))\sigma^{D} \\ (i,k)\sigma^{D} \end{cases} \tag{σ^{DM}}$$

e di conseguenza

$$(i,k)\sigma_{DM} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DM} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{T} & n, m > 2 \\ (i,k)\sigma^{DM} \end{cases} \tag{σ_{DM}}$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{DM}$.

Anche in questo caso valgono le osservazioni fatte a proposito della logica OM.

È interessante notare che gli indici

$$(W_2, (w_3, (W_1, w_1))) \qquad\qquad (w_4, (W_1, w_1))$$

σ_{DM}-unificano, ma gli indici

$$(W_2, (w_3, (w_2, w_1))) \qquad\qquad (w_4, (w_2, w_1))$$

non unificano. La prima coppia di indici corrisponde alla formula $\Diamond(\Diamond A \to \Box\Diamond A)$ mentre la seconda è il corrispettivo, in indici, di $\Box(\Diamond A \to \Box\Diamond A)$. Questo fatto mostra che una struttura normativa modellata rispetto questa logica, pur richiedendo l'idealità deontica, ammette "cluster" di alternative deonticamente equivalenti ma ammette altresì molteplici alternative.

Le logiche $OS4$**,** $DS4$

Queste logiche sono ottenute da OM e DM tramite l'aggiunta dell'assioma **4**, e sono il corrispettivo deontico delle logiche $D4$ e $S4$. Le unificazioni alta sarà quindi la combinazione delle unificazioni alte corrispondenti a **M** e alla transitività.

Per prima cosa definiamo la σ^{OS4}

$$(i,k)\sigma^{OS4} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{O} & l(i) = l(k) \\ (i,k)\sigma^{T} & h(\text{shortest}\{i,k\}) \in \Phi_C \text{ e} \\ & (s^2(i), s^2(k))\sigma^{O} \\ (i,k)\sigma^{4} & h(\text{shortest}\{i,k\}) \in \Phi_V \text{ e} \\ & (s^2(i), s^2(k))\sigma^{O} \end{cases} \tag{σ^{OS4}}$$

da cui otteniamo

$$(i,k)\sigma_{OS4} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{OS4} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{S4} & n, m > 2 \\ (i,k)\sigma^{OS4} \end{cases} \tag{σ_{OS4}}$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{OS4}$.

Analogamente per $DS4$ avremo

$$(i,k)\sigma^{DS4} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{D} & l(i) = l(k) \\ (i,k)\sigma^{T} & h(\text{shortest}\{i,k\}) \in \Phi_C \text{ e} \\ & (s^2(i), s^2(k))\sigma^{D} \\ (i,k)\sigma^{4} & h(\text{shortest}\{i,k\}) \in \Phi_V \end{cases} \tag{σ^{DS4}}$$

e quindi

$$(i,k)\sigma_{DS4} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DS4} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{S4} & n,m > 2 \\ (i,k)\sigma^{DS4} \end{cases} \qquad (\sigma_{DS4})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{DS4}$.

Si noti che la quasi-riflessività non incide sulla transitività.

La logica OMB

OMB è il corrispettivo deontico della logica B, e quindi è ottenuto da OM con l'aggiunta dell'assioma **B**. Nei termini di una rappresentazione in mondi possibili questa logica è caratterizzata da classi di mondi in relazione di similarità e punti terminali

$$(i,k)\sigma^{OMB} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{OM} \\ (i,k)\sigma^{KB} \end{cases} \qquad (\sigma^{OMB})$$

siamo così in grado di definire

$$(i,k)\sigma_{OMB} \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{OMB} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{TB} & \max\{n,m\} > 2 \\ (i,k)\sigma^{OMB} \end{cases} \qquad (\sigma_{OMB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{OMB}$.

Esempio 3.27. In base alla definizione della σ_{OMB} gli indici

$$(W_2, (W_1, (w_2, w_1))) \qquad\qquad w_1$$

σ_{OMB}-unificano dato che

$$c^3(W_2, (W_1, (w_2, w_1))) = (W_2, w_1) \qquad\qquad w_1$$

σ^{TB}-unificano anche se usualmente non σ_{OMB}-unificano. Questo è giustificato dal fatto che w_1 e $(W_1, (w_2, w_1))$ σ_{OMB} e che è il risultato della loro unificazione.

Esempio 3.28. Forniamo ora la dimostrazione dell'assioma **M**.

1. $F\Box(\Box A \to A)$	w_1
2. $F\Box A \to A$	(w_2, w_1)
3. $T\Box A$	(w_2, w_1)
4. FA	(w_2, w_1)
5. TA	$(W_1, (w_2, w_1))$
6. $\times$	(w_2, w_1)

La dimostrazione ricalca la dimostrazione dell'assioma **T**, tranne per il fatto che al primo passo applichiamo una regola π, che inserisce l'indice (w_2, w_1), che possiamo σ_{XM}-unificare con $(W_1, (w_2, w_1))$.

Logiche con l'assioma $\Box(A \to \Box\Diamond A)$

L'assioma **UB**=$\Box(A \to \Box\Diamond A)$ caratterizza la classe di modelli la cui relazione di accessibilità è quasi simmetrica[25].

Le logiche KUB**,** OUB**,** DUB

La logica KUB è il corrispettivo deontico di KB ed è ottenuta da K con l'aggiunta dell'assioma **UB**, mentre DUB è ottenuta aggiungendolo a D. OUB invece corrisponde a K più gli assiomi **O**=$\Box(\Box A \to \Diamond A)$ e **UB**.

Per ottenere la σ^{KUB}-unificazione dovremo ripetere quanto fatto per l'assioma **M**, ma partendo dall'unificazione per KB.

$$(i,k)\sigma^{KUB} = \begin{cases} (c^2(i), c^2(k))\sigma^B & \text{con } w_0 = (s^2(i), s^2(k))\sigma^O \\ & h^3(i) \text{ o } k^3(k) \in \text{Den} \\ (c^2(i), c^2(k))\sigma^O & \text{con } w_0 = (s^2(i), s^2(k))\sigma^K \end{cases} \qquad (\sigma^{KUB})$$

La condizione che uno dei segmenti di lunghezza 3 sia ristretto è analoga a quella che abbiamo imposto per KB, tenendo presente che la quasi simmetria non implica la quasi serialità ma una quasi quasi serialità, quindi la condizione stessa.

Dopo aver definito la σ^{KUB}-unificazione possiamo definire la corrispettiva

[25] Una relazione è quasi simmetrica se $\forall x, y(xRy \to \forall z(yRz \to zRy))$; per la dimostrazione del teorema di completezza si veda (Åqvist 1985)

unificazione bassa σ_{KUB}.

$$(i,k)\sigma_{KUB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{KUB} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{KB} & n, m > 2 \\ (i,k)\sigma^{KUB} \end{cases} \qquad (\sigma_{KUB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{KUB}$.

Esempio 3.29. Gli indici

$$i = (W_4, (w_3, (W_3, (w_2, w_1)))) \qquad k = (W_2, (W_1, w_1))$$

non σ_{KUB} unificano i quanto i loro segmenti di lunghezza 3 sono non ristretti. Al contrario gli indici

$$i' = (W_3, (W_2, (W_1, (w_3, (w_2, w_1))))) \qquad k' = (W_4, w_1)$$

unificano in KUB; infatti k' e $(W_1, (w_3, (w_2, w_1)))$ σ^{KUB}-unificano in quanto σ^{KB}-unificano e soddisfano la condizione imposta, a questo punto $w_0 = (w_2, w_1)$, ma $(s^4(i'), w_0)\sigma^D B$; si tenga presente che in questo caso la condizione imposta sulla σ^{KB} è globale, si riferisce cioè agli indice nella loro totalità e non solamente ai controsegmenti.

A differenza del caso precedente non dobbiamo imporre condizioni che garantiscano la denotazione degli indici di una certa lunghezza critica, dato che essa è garantita dall'assunzione dell'assioma **O**. Pertanto avremo

$$(i,k)\sigma^{OUB} = \begin{cases} (c^2(i), c^2(k))\sigma^B & \text{con } w_0 = (s^2(i), s^2(k))\sigma^O \\ (i,k)\sigma^O \end{cases} \qquad (\sigma^{OUB})$$

e così possiamo in grado di definire

$$(i,k)\sigma_{OUB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{OUB} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DB} & n, m > 2 \\ (i,k)\sigma^{OUB} \end{cases} \qquad (\sigma_{OUB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{OUB}$.

$$(i,k)\sigma^{DUB} = \begin{cases} (c^2(i), c^2(k))\sigma^B & \text{con } w_0 = (s^2(i), s^2(k))\sigma^D \\ (i,k)\sigma^D \end{cases} \qquad (\sigma^{DUB})$$

siamo così in grado di definire

$$(i,k)\sigma_{DUB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DUB} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DB} & n,m > 2 \\ (i,k)\sigma^{DUB} \end{cases} \qquad (\sigma_{DUB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{DUB}$.

Le logiche $OMUB$, $DMUB$

Queste logiche sono ottenute, rispettivamente, da K e da D con l'aggiunta degli assiomi **M** e **UB**; caratterizzeranno quindi i modelli in cui la relazione è di quasi-similarità (quasi simmetria e quasi riflessività). Esse si differenziano per il fatto che $OMUB$ ammette punti terminali. È anche possibile ottenerle aggiungendo l'assioma **UB** alle logiche OM e DM o aggiungendo l'assioma **M** alle logiche OUM e DUB, Le unificazioni corrispondenti sono la combinazione delle unificazioni per le logiche da cui sono ottenute, quindi:

$$(i,k)\sigma^{OMUB} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{OM} \\ (i,k)\sigma^{OUB} \end{cases} \qquad (\sigma^{OMUB})$$

pertanto siamo in grado di definire

$$(i,k)\sigma_{OMUB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{OMUB} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{TB} & n,m > 2 \\ (i,k)\sigma^{OMUB} \end{cases} \qquad (\sigma_{OMUB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{OMUB}$.

In maniera analoga avremo

$$(i,k)\sigma^{DMUB} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{DM} \\ (i,k)\sigma^{DUB} \end{cases} \qquad (\sigma^{DMUB})$$

e

$$(i,k)\sigma_{DMUB} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DMUB} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{TB} & n,m > 2 \\ (i,k)\sigma^{DMUB} \end{cases} \qquad (\sigma_{DMUB})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{DMUB}$

Esempio 3.30. Forniamo a titolo di esempio la dimostrazione dell'assioma **UB**.

1.	$F\Box(A \to \Box\Diamond A)$	w_1
2.	$FA \to \Box\Diamond A$	(w_2, w_1)
3.	TA	(w_2, w_1)
4.	$F\Box\Diamond A$	(w_2, w_1)
5.	$F\Diamond A$	$(w_3, (w_2, w_1))$
6.	FA	$(W_1, (w_3, (w_2, w_1)))$

Anche in questo caso la dimostrazione ricalca quella dell'assioma modale corrispondente all'assioma **UB**, cioè **B**, cosiché valgono le osservazioni fatte a proposito della dimostrazione per **M**. Si noti che gli indici (w_2, w_1) e $(W_1, (w_3, (w_2, w_1)))$ unificano in tutte le XUB-logiche rendendo le formule (3) e (6) σ_L-complementari per tutte queste logiche.

In base agli esempi di logiche che abbiamo presentato in maniera sistematica in questa sezione è facile estendere il criterio con cui abbiamo definito le unificazioni anche al caso degli assiomi che hanno la seguente forma

$$\Box^n(\mathbf{L})$$

dove **L**=**D**, **T**, **4**, **B**, **5**, **F** e **V**.

Logiche deontiche aletiche

L'obbligo delle logiche deontiche appena esaminate coincide con il necessario del sistema. È possibile definire l'obbligo in maniera differente come una gradazione del necessario[26], in particolare come:

$$\mathsf{O}A =_{df} \Box(Q \to A)$$

dove Q è una costante proposizionale detta costante di idealizzazione[27]. L'assioma che governa il comportamento della costante Q è il seguente:

$$\Diamond Q \qquad (\mathbf{Q})$$

Per tener conto della nuova costante il modello sarà così composto:

$$\langle W, R, O, v \rangle$$

[26](Kanger 1971, Anderson 1958)

[27](Åqvist 1984, Åqvist 1985, Galvan 1991)

dove $O \subseteq W$, l'insieme dei mondi ottimali, e aggiungiamo la seguente clausola alla valutazione:

$$v(Q, w_i) = V \iff w_i \in O \ .$$

Infine R è O-seriale ($\forall w \in W, \exists y \in O : wRy$). Le Q-logiche saranno caratterizzate in KEM dalla seguente regola d'inferenza:

$$\frac{FQ, i}{\times}[i \text{ non ristretto, } l(i) > 1] \qquad \text{(QPNC)}$$

Per alcune logiche non abbiamo fornito le $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$-unificazioni ma siamo passati direttamente alle loro σ_L; per tali logiche stipuliamo che $\sigma^{A_1 \cdots A_n} = \sigma_L$.

3.5.3 Logiche multi modali

In questo paragrafo mostreremo come adattare le unificazioni esposte nei paragrafi precedenti alle logiche multimodali; in particolare mostreremo le unificazioni per logiche trattate nel paragrafo 2.6 e analizzeremo come si possano rappresentare i rapporti fra le modalità attraverso gli indici.

Le logiche MM

In questa sezione mostreremo come combinare tra loro logiche modali (MM) senza principi ponte, vale a dire, senza assiomi o regole che stabiliscono i rapporti tra le modalità e quindi presenteremo la forma generale di tali unificazioni. Così come una logica $L = MM$ è ottenuta per combinazione delle varie $L_1, \ldots, L_k$ che la compongono, l'unificazione sarà la combinazione delle varie $\sigma^{A_1^l \cdots A_m^l}, 1 \leq l \leq k$ che compongono la logica.

$$(i,k)\sigma_{MM} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{A_1^l, \ldots, A_m^l} \\ (i,k)\sigma^{A_1^l, \ldots, A_m^l} \end{cases} \quad 1 \leq l \leq k \qquad (\sigma_{MM})$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_M M$, se $c^n(i), c^n(k)$ sono l-puri, $1 \leq l \leq k$.

Supponiamo, come già abbiamo visto, di voler combinare tra loro due logiche modali, diciamo una modalità epistemica $\Box_1$ di tipo $D45$ e una deontica $\Box_2$ di tipo D; una logica siffatta, chiamiamola ED, è in grado di esprimere e formalizzare concetti concernenti la conoscenza di obblighi (se un'agente sa che A è obbligatorio, allora crede che A sia anche permesso) e obblighi di conoscenza (un esempio di un obbligo di conoscenza è rappresentato dagli avvisi di garanzia e il già ricordato articolo 368 del codice penale).

Utilizzeremo rispettivamente $e_1, e_2, \dots$ e $E_1, E_2, \dots$ per denotare Φ^1_C e Φ^1_V, e $d_1, d_2, \dots$ e $D_1, D_2, \dots$ per denotare Φ^2_C e Φ^2_V. L'unificazione per ED è definita come

$$(i,k)\sigma_{ED} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{D^1 4^1 5^1} \\ (i,k)\sigma^{D^1 4^1 5^1} \\ (c^n(i), c^m(k))\sigma^{D^2} \\ (i,k)\sigma^{D^2} \end{cases} \tag{3.7}$$

con $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_M M$, se $c^n(i), c^n(k)$ sono k-puri, $k \in \{1, 2\}$.

In base a questa definizione gli indici

$$i = (E_2, (e_1, (D_1, w_1))) \qquad\qquad j = (e_2, (d_1, w_1))$$

σ_{ED}-unificano. Infatti

$$c^2(i) = (E_2, (e_1, w_0) \qquad\qquad c^2(j) = (e_2, w_0)$$

$\sigma^{D^1 4^1 5^1}$-unificano, e $w_0 = ((D_1, w_1), (d_1, w_1))\sigma^{D^2}$. Tuttavia se al posto di i avessimo avuto $i' = (E_2, (d_2, (e_1, (D_1, w_1)))$, allora questo non unificherebbe con j dato che $c^2(i')$ non è 2-puro.

La logica $S5A$

Per trattare questa logica aggiungiamo l'indice costante a all'insieme degli indici costanti. Come abbiamo visto questa logica è ottenuta per combinazione di logiche di tipo $S5$ e $D45$ per cui abbiamo dato delle unificazioni che non rispecchiano la definizione 3.17; pertanto possiamo definire l'unificazione come segue:

$$(i,k)\sigma_{S5A} = (i,k)\sigma_{S5} \tag{σ_{S5A}}$$

Aggiungiamo una regola di inferenza per l'operatore $\triangle$

$$\frac{S\triangle A, i}{SA, (a, i)} \tag{$\triangle$}$$

Questa regola coglie il comportamento funzionale dell'operatore $\triangle$, e rispetta l'unicità del mondo attuale.

Mostriamo le dimostrazioni in KEM degli assiomi caratteristici di $S5A$.

1. $F\Box A \rightarrow \triangle A$	w_1
2. $T\Box A$	w_1
3. $F\triangle A$	w_1
4. TA	(W_1, w_1)
5. FA	(a, w_1)
6. $\times$	(a, w_1)

Questo assioma afferma che l'attualità è una specie di necessità e che il mondo attuale è accessibile da ogni mondo, infatti possiamo fare unificare i due indici.

1. $F\triangle\neg A \equiv \neg\triangle A \quad w_1$

2. $T\triangle\neg A$	w_1	3. $F\triangle\neg A$	w_1
4. $F\neg\triangle A$	w_1	9. $T\neg\triangle A$	w_1
5. $T\triangle A$	w_1	10. $F\triangle A$	w_1
6. FA	(a, w_1)	11. FA	(a, w_1)
7. TA	(a, w_1)	12. TA	(a, w_1)
8. $\times$	(a, w_1)	13. $\times$	(a, w_1)

Questo assioma asserisce la funzionalità dell'operatore $\triangle$, che, per quanto riguarda la sua rappresentazione in KEM è garantita dal formato della regola d'inferenza che riguarda l'operatore di attualità, qui applicata ai passi 6 e 11.

1. $F\triangle A \rightarrow \Box\triangle A$	w_1
2. $T\triangle A$	w_1
3. $F\Box\triangle A$	w_1
4. TA	(a, w_1)
5. $F\triangle A$	(w_2, w_1)
6. FA	$(a, (w_2, w_1))$
7. $\times$	(a, w_1)

Questo assioma stabilisce l'unicità del mondo attuale, infatti, a differenza delle altre unificazioni, ma similmente alla σ_{S5}-unificazione, non ci interessa il percorso ma solamente il punto di arrivo.

La logica $S5P_{(n)}$

$S5P_{(n)}$ semanticamente è caratterizzata da modelli di Kripke estesi con cluster dove le relazioni di accessibilità sono (i) una relazione di equivalenza, per l'operatore $\Box$, (ii) relazioni euclidee e transitive per gli operatori P_i; inoltre questi ultimi determinano cluster di mondi preferiti. Avremo bisogno quindi dei seguenti insiemi di indici:

- $\Phi_V^0 = \{W_1, W_2, \ldots\}$ e $\Phi_C^0 = \{w_1, w_2, \ldots\}$ per gli indici variabili e costanti corrispondenti all'operatore $\Box$;
- $\Phi_V^k = \{W_1^k, W_2^k, \ldots\}$ e $\Phi_C^k = \{w_1^k, w_2^k, \ldots\}$ per gli indici variabili e costanti corrispondenti all'operatore P_k.

Al fine di ottenere l'unificazione che tenga conto del rapporto di inclusione delle relazioni di accessibilità del modello introduciamo la sostituzione di mondi θ^+ così definita:

$$\theta^+(i) = \begin{cases} j \in \Im & i \in \Phi_V^0 \\ \theta(i) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Analogamente a come abbiamo definito la sostituzione di indici e l'unificazione a partire dalla sostituzione di mondi θ definiamo la corrispondente sostituzione di indici ρ^+ come

$$\rho^+ = \rho[\theta^+/\theta]$$

dove $[\theta^+/\theta]$ denota la sostituzione uniforme di θ^+ al posto di θ, e la corrispondente l'unificazione σ^+ come

$$\sigma^+ = \sigma[\rho^+/\rho] \ .$$

Anche per $S5P_{(n)}$, date le sue caratteristiche semantiche, definiremo direttamente un'unificazione bassa senza passare per le unificazioni alte.

$$\begin{aligned} (i,k)\sigma_{S5P_{(n)}} = ((h(i), h(k))\sigma^+; (s^1(i), s^1(k))\sigma^+) \text{ sse} & \\ i, \text{ o } k \text{ è } i\text{-ground}, 1 \leq i \leq n, \text{ o} & \\ \exists s(i), s(k) : h(s(i)), h(s(k)) \in \Phi^i, \text{ e} & \\ (s(i), s(k))\sigma_{S5P_{(n)}}. & \end{aligned} \qquad (\sigma_{S5P_{(n)}})$$

Esempio 3.31. Gli indici

$$(w_1^2, (W_3^1, w_1)) \qquad\qquad (W_2^2, (w_1^3, (w_1^1, w_1)))$$

$\sigma_{S5P_{(n)}}$-unificano dato che le teste unificano e esistono dei segmenti che soddisfano l'ultima condizione; infatti il primo indice non è 3-ground, mentre il secondo non è 2-ground, ma ci sono dei segmenti che $\sigma_{S5P_{(n)}}$-unificano, ed esattamente

$$((W_3^1, w_1), (w_1^3, (w_1^1, w_1)))\sigma^{S5P_{(n)}} \ .$$

Forniamo ora, a titolo di esempio, le dimostrazioni in KEM degli assiomi di $S5P_{(n)}$.

1. $F\Box A \rightarrow P_i A$	w_1
2. $T\Box A$	w_1
3. $FP_i A$	w_1
4. TA	(W_1, w_1)
5. FA	(w_2^i, w_1)
6. $\times$	(w_2^i, w_1)

Questo assioma, che non necessita spiegazioni, stabilisce che i mondi preferiti sono un sottoinsieme dei mondi accessibili da un dato mondo.

1. $F\Box P_i A \equiv P_i A \quad w_1$

2. $TP_i A \rightarrow \Box P_i A$	w_1	3. $FP_i A \rightarrow \Box P_i A$	w_1
4. $F\Box P_i A \rightarrow P_i A$	w_1	11. $T\Box P_i A \rightarrow P_i A$	w_1
5. $T\Box P_i A$	w_1	12. $TP_i A$	w_1
6. $FP_i A$	w_1	13. $F\Box P_i A$	w_1
7. $TP_i A$	(W_1, w_1)	14. $FP_i A$	(w_2, w_1)
8. FA	(w_2^i, w_1)	15. TA	(W_3^i, w_1)
9. TA	$(W_2^i, (W_1, w_1))$	16. FA	$(w_3^i, (w_2, w_1))$
10. $\times$	(w_2^i, w_1)	17. $\times$	(w_3^i, w_1)

Questo assioma, congiuntamente al prossimo, afferma la non dipendenza dei mondi preferiti dal mondo in cui la preferenza viene effettuata. Vale a dire che i mondi preferiti di un dato tipo non sono in funzione dei vari mondi, ma vengono stabiliti una volta per tutte nel modello. Per quanto riguarda la dimostrazione basti notare che in entrambi i rami uno degli indici delle formule complementari è ground.

1. $F\neg P_i\bot \to (P_iP_jA \equiv P_jA)$	w_1
2. $T\neg P_i\bot$	w_1
3. $FP_iP_jA \equiv P_jA$	w_1
4. $FP_i\bot$	w_1
5. $F\bot$	(w_2^i, w_1)

6. TP_iP_jA	w_1	7. FP_iP_jA	w_1
8. FP_jA	w_1	13. TP_jA	w_1
9. TP_jA	(W_1^i, w_1)	14. FP_jA	(w_4^i, w_1)
10. TA	$(W_2^j, (W_1^i, w_1))$	15. FA	$(w_5^j, (w_4^i, w_1))$
11. FA	(w_3^j, w_1)	16. TA	(W_3^j, w_1)
12. $\times$	(w_3^j, w_1)	17. $\times$	(w_5^j, w_1)

La differenza con l'assioma precedente riguarda il trattamento dei mondi preferiti. Infatti tali insiemi, in particolare l'insieme dei mondi di tipo i, potrebbero essere vuoti, e pertanto gli indici $(W_2^j, (W_1^i, w_1))$ e (w_3^j, w_1) non unificherebbero, ma la non vuotezza della denotazione degli indici di tipo i viene garantita dall'indice ristretto (w_2^i, w_1). Per la motivazione e i dettagli tecnici di questo tipo di dimostrazione si veda il paragrafo 3.8.

1. $F\neg P_i\bot \to (P_i\Box A \equiv \Box A)$	w_1
2. $T\neg P_i\bot$	w_1
3. $FP_i\Box A \equiv \Box A$	w_1
4. $FP_i\bot$	w_1
5. $F\bot$	(w_2^i, w_1)

6. $TP_i\Box A$	w_1	7. $FP_i\Box A$	w_1
8. $F\Box A$	w_1	13. $T\Box A$	w_1
9. $T\Box A$	(W_1^i, w_1)	14. $F\Box A$	(w_4^i, w_1)
10. TA	$(W_2, (W_1^i, w_1))$	15. FA	$(w_5, (w_4^i, w_1))$
11. FA	(w_3, w_1)	16. TA	(W_3, w_1)
12. $\times$	(w_3, w_1)	17. $\times$	(w_5, w_1)

La spiegazione di questa dimostrazione è sostanzialmente identica a quella della dimostrazione precedente.

La logica $\mathcal{H}$

Per poter trattare con questa logica, istanza di una logica multimodale con il principio ponte $\Box^1 A \to \Box^2 A$, dovremo definire gli insiemi di indici appropriati. Differentemente da $S5P_{(n)}$ gli indici non corrisponderanno a elementi di cluster di mondi preferiti, ma a mondi accessibili tramite una delle due relazioni di accessibilità definite nel modello. Pertanto avremo i seguenti insiemi di indici:

- $\Phi_V^{\Box} = \{W_1, W_2, \ldots\}$, e $\Phi_C^{\Box} = \{w_1, w_2, \ldots\}$;
- $\Phi_V^{\mathcal{H}} = \{H_1, H_2, \ldots\}$, e $\Phi_C^{\mathcal{H}} = \{h_1, h_2, \ldots\}$.

I mondi di tipo $\Phi^{\Box}$ corrispondono ai mondi accessibili tramite R_1, connessa alla modalità $\Box$, e quelli di tipo $\Phi^{\mathcal{H}}$ a quelli accessibili tramite la relazione R_2 connessa alla modalità d'ipotesi H. Le unificazioni dovranno tener presente la condizione di inclusione delle relazioni, e quindi utilizzeremo l'unificazione σ^+.

$$\begin{aligned}(i,k)\sigma^{\mathcal{H}} =& (c^{l(b(i))}(i), c^{l(b(k))}(k))\sigma^+ \iff \\ & \text{o } h(i) \text{ o } h(k) \in \mathrm{Den}, \text{ oppure} \\ & h(i), h(k) \in \Phi_V^{\Box}\end{aligned} \qquad (\sigma^{\mathcal{H}})$$

dove $w_0 = (b(i), b(k))\sigma^{\mathcal{H}}$.

Esempio 3.32. Dati gli indici

$$i = (W_1, (H_1, w_1)) \qquad j = (W_2, (h_1, w_1)) \qquad k = (w_2, (W_3, w_1))$$

avremo che $(i,j)\sigma^{\mathcal{H}}$ e $(j,k)\sigma^{\mathcal{H}}$ ma i e k non $\sigma^{\mathcal{H}}$-unificano dato che entrambi i segmenti di lunghezza due sono non ristretti e uno e h-preferito.

Inoltre avremo bisogno di un'altra sostituzione, $\theta^{\Box}$, che "isoli" il comportamenti dei mondi di tipo $\Phi^{\Box}$.

$$\theta^{\Box}(i) = \begin{cases} j \in \Im^- & i \in \Phi_V^{\Box} \\ i & i \in \Phi_C \end{cases}$$

dove $\Im^-$ è l'insieme di indici costruiti a partire da $\Phi_V^{\Box}$ e Φ_C. In sostanza $\theta^{\Box}$ esclude dalla sostituzione gli indici variabili di tipo $\mathcal{H}$. A partire da $\rho^{\Box}$ otteniamo $\rho^{\Box} = \rho[\theta_{\Box}/\theta]$ e $\sigma^{\Box} = \sigma[\rho^{\Box}/\rho]$.

$$(i,k)\sigma^{\mathcal{T}} = \begin{cases} (s^{l(k)}(i), k)\sigma^{\mathcal{H}} & l(i) > l(k), \text{ e} \\ & \forall m \geq l(k), (i^m, h(k))\sigma^{\Box} = (h(i), h(k))\sigma^{\Box} \\ (i, s^{l(i)}(k))\sigma^{\mathcal{H}} & l(k) > l(i), \text{ e} \\ & \forall m \geq l(i), (h(i), k^m)\sigma^{\Box} = (h(i), h(k))\sigma^{\Box} \end{cases} \qquad (\sigma^{\mathcal{T}})$$

Esempio 3.33. Gli indici

$$(W_2,(h_1,w_1)) \qquad\qquad (W_1,w_1)$$

$\sigma^{\mathcal{T}}$-unificano in (h_1,w_1) in quanto $(w_1,w_1)\sigma^{\mathcal{H}}$ e

$$(W_2,W_1)\sigma^{\Box} = (h_1,W_1)\sigma^{\Box} = h_1 \ .$$

Gli indici

$$i = (W_2,(H_1,(W_1,w_1))) \qquad\qquad k = (h_1,w_1)$$

non unificano in quanto nella parte eccedente di i compare una variabile di tipo $\mathcal{H}$ e quindi non è possibile eseguire $\sigma^{\Box}$ rispetto a H_1.

Siamo pronti per definire l'unificazione alta composta per $\mathcal{H}$.

$$(i,k)\sigma^{\mathcal{HT}} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{\mathcal{H}} \\ (i,k)\sigma^{\mathcal{T}} \end{cases} \qquad (\sigma^{\mathcal{HT}})$$

da cui si ottiene l'unificazione bassa appropriata per la logica $\mathcal{H}$

$$(i,k)\sigma_{\mathcal{H}} = \begin{cases} (c^n(i),c^m(k))\sigma^{\mathcal{HT}} \\ (i,k)\sigma^{\mathcal{HT}} \end{cases} \qquad (\sigma_{\mathcal{H}})$$

con $w_0 = (s^n(i),s^m(k))\sigma_{\mathcal{H}}$.

Esempio 3.34. Come abbiamo visto nell'esempio precedente gli indici

$$i = (W_2,(H_1,(W_1,w_1))) \qquad\qquad k = (h_1,w_1)$$

non $\sigma^{\mathcal{T}}$-unificano e tanto meno $\sigma^{\mathcal{H}}$-unificano, ma è possibile farli $\sigma_{\mathcal{H}}$-unificare dato che possiamo scomporre l'unificazione come segue: $(c^3(i),c^2(k))\sigma^{\mathcal{T}}$ con $w_0 = (s^3(i),k)\sigma_{\mathcal{H}}$; quest'ultimo è possibile in quanto $(c^2(s^3(i)),c^1(k))\sigma^{\mathcal{H}}$ e quindi $\sigma_{\mathcal{H}}$ e il loro $w_0 = (s^2(i),s^1(k))\sigma^{\mathcal{T}}$.

Esempio 3.35. Forniamo senza ulteriori commenti le dimostrazioni in *KEM* degli assiomi di $\mathcal{H}$.

1.	$F[H](A \to B) \to ([H]A \to [H]B)$	w_1
2.	$T[H](A \to B)$	w_1
3.	$F[H]A \to [H]B$	w_1
4.	$TA \to B$	(H_1, w_1)
5.	$T[H]A$	w_1
6.	$F[H]B$	w_1
7.	TA	(H_2, w_1)
8.	FB	(h_1, w_1)
9.	FA	(h_2, w_1)
10.	$\times$	(h_2, w_1)

Per questa dimostrazioni possiamo ripetere le considerazioni fatte a proposito della dimostrazione dell'assioma **K**.

1.	$F\Box A \to [H]A$	w_1
2.	$T\Box A$	w_1
3.	$F[H]A$	w_1
4.	TA	(W_1, w_1)
5.	FA	(h_1, w_1)
6.	$\times$	(h_1, w_1)

Gli indici delle formule complementari 3 e 4 $\sigma_{\mathcal{H}}$-unificano dato che per ogni coppia di segmenti di lunghezza uguale la testa di uno dei due è denotante.

La logica JP

Per trattare questa logica con KEM abbiamo bisogno di distinguere tre tipi di indici:

- Universali $\Phi_W = \{W_1, W_2, \dots\}$ e $\Phi_w = \{w_1, w_2, \dots\}$;
- Ideali $\Phi_D = \{D_1, D_2, \dots\}$ e $\Phi_d = \{d_1, d_2, \dots\}$;
- Subideali $\Phi_S = \{S_1, S_2, \dots\}$ e $\Phi_s = \{s_1, s_2, \dots\}$;

I mondi universali denotano mondi su cui non abbiamo informazioni sufficienti per determinare se sono mondi ideali o mondi subideali, di conseguenza l'insieme di mondi costanti e dei mondi variabili sono così definiti:

$$\begin{aligned}\Phi_V &= \Phi_W \cup \Phi_D \cup \Phi_S \text{ e}\\ \Phi_C &= \Phi_w \cup \Phi_d \cup \Phi_s \ .\end{aligned}$$

Per poter definire le unificazioni appropriate a questa logica dobbiamo definire una sostituzione $\theta^{\#}$ che si comporta come θ^{+} per quanto riguarda i mondi universali e le costanti

$$\theta^{\#}\Phi_W = \theta^{+}\Phi_W$$
$$\theta^{\#}\Phi_C = \theta^{+}\Phi_C$$

mentre per i mondi ideali e subideali si comporta nel seguente modo

$$\begin{aligned}\theta^{\#} &: \ \Phi_S \to \Phi^{s}\\ &: \ \Phi_D \to \Phi^{d}\end{aligned}$$

dove

$$\Phi^{d} = \{i^{r} \in \Phi_C : r = d\} \qquad \Phi^{s} = \{i^{r} \in \Phi_C : r = s\}$$

Φ^{d}, Φ^{s} denotano, rispettivamente, i mondi che sono una versione ideale, subideale di se stessi.

A partire dalla sostituzione $\theta^{\#}$ possiamo definire la sostituzione $\rho^{\#} = \rho[\theta^{\#}/\theta^{+}]$ e l'unificazione $\sigma^{\#} = \sigma[\rho^{\#}/\rho^{+}]$ che ci permettono di definire le unificazioni alte appropriate.

$$(i,k)\sigma^{R} = \begin{cases} (s^{l(k)}(i),k)\sigma^{+} & l(i) > l(k), h(k) \in \Phi_C \text{ e} \\ & \forall m > l(k), (i^{m}, h(k))\sigma^{\#} = (i^{l(k)}, h(k))\sigma^{+} \\ (i, s^{l(i)}(k))\sigma^{+} & l(k) > l(i), h(i) \in \Phi_C \text{ e} \\ & \forall m > l(i), (h(i), k^{m})\sigma^{\#} = (h(i), k^{l(i)})\sigma^{+} \end{cases} \qquad (\sigma^{R})$$

Esempio 3.36. Gli indici

$$(D_1, (w_2^{d}, w_1)) \qquad\qquad (w_2^{d}, w_1)$$

σ^{R}-unificano dato che

$$w_2^{d} = (D_1, w_2^{i})\sigma^{\#} = (w_2^{d}, w_2^{d})\sigma^{+}$$

e banalmente $(w_1, w_1)\sigma^{+}$.

Siamo ora in grado di definire l'unificazione alta composta che caratterizza JP

$$(i,k)\sigma_{JP} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{+} \\ (i,k)\sigma^{R} \end{cases} \tag{σ^{JP}}$$

da cui si ottiene

$$(i,k)\sigma_{JP} = \begin{cases} (c^{n}(i), c^{m}(k))\sigma^{JP} \\ (i,k)\sigma^{JP} \end{cases} \tag{σ_{JP}}$$

dove $w_0 = (c^n(i), c^n(k))\sigma_{JP}$.

Esempio 3.37. Un complesso esempio di σ_{JP}-unificazione è fornito dagli indici

$$(d_2^s, (D_2, (W_1, (D_1, w_1^d)))) \qquad\qquad (S_1, (W_2, (s_2^d, w_1^d)))$$

dove

$$((d_2^s, w_0), (S_1, (W_2, w_0))\sigma_{JP}$$

dato che

$$(d_2^s, S_1)\sigma^{\#} = (d_2^s, W_2)\sigma^{+} = d_2^s$$

e

$$w_0 = ((D_2, (W_1, w_0')), (s_2^i, w_0'))\sigma_{JP} \ ,$$

infatti

$$(D_2, s_2^d)\sigma^{\#} = (W_1, s_2^d)\sigma^{+} = s_2^d$$

inoltre

$$w_0' = ((D_1, w_1^d), w_1^d)\sigma_{JP} \ .$$

L'unificazione che abbiamo definito, da sola, non è sufficiente per caratterizzare JP, e, pertanto, abbiamo bisogno di regole d'inferenza che rispecchiano le definizioni dei vari operatori e le particolari condizioni (**C1** e **C2**) che completano la caratterizzazione semantica di questa logica.

Le regole di questa logica, a parte le regole standard di KEM, sono, per l'operatore N_D

$$\frac{T\mathsf{N}_D A, i}{TA, (W_n, i)}[\text{con } W_n \text{ nuovo}] \tag{$T\mathsf{N}_D$}$$

La verità di una formula deonticamente necessaria implica che la formula necessitata vale in tutti i mondi accessibili siano essi ideali o subideali, e quando è falso avremo

$$\frac{F\mathsf{N}_D A, i}{F\mathsf{O}^i A \wedge \mathsf{O}^s A, i} \tag{$F\mathsf{N}_D$}$$

Non abbiamo bisogno di una regola particolare per l'operatore $\mathsf{O_T}$ dato che essa si conforma esattamente come la sua definizione.

Le regole strutturali di JP sono:

$$\frac{\begin{array}{c} X,(D,j) \\ X,(S,k) \end{array}}{X,(W_n,(j,k)\sigma_{DL})}[(j,k)\sigma_{JP}] \tag{TND}$$

che ci permette di stabilire quando una proprietà vale in tutti i mondi accessibili a partire da un dato mondo. Lo scopo principale di questa regola è quello di garantire la riflessività rispetto j e k, cioè ogni mondo o è una versione ideale o una versione subideale di se stesso. Infatti, come dimostreremo nel teorema 3.2, una proprietà generale degli indici afferma

$$(j,k)\sigma_{JP} \Rightarrow ((j,k)\sigma_{JP},j)\sigma_{JP} \text{ e } ((j,k)\sigma_{JP},k)\sigma_{JP} \; .$$

La Regola di Riflessività (RR), invece ci permette di stabilire quando in mondo è una versione ideale o una versione subideale di se stesso

$$\frac{\begin{array}{c} \nu_{\{i,s\}},j \\ \nu_0^C,k \end{array}}{\begin{array}{c} \nu_{\{i,s\}},m^r \\ \nu_0^C,m^r \end{array}}[m=(j,k)\sigma_{JP}] \tag{RR}$$

dove

$$\begin{array}{ll} i^r = i^s & \text{if } \nu_{\{i,s\}} = T\mathsf{O}^i A\,(F\mathsf{P}^i A) \\ i^r = i^d & \text{if } \nu_{\{i,s\}} = T\mathsf{O}^s A\,(F\mathsf{P}^s A) \end{array}$$

e

$$i^x = i : h(i) \in \Phi^x, (x \in \{d,s\})$$

Ovviamente ogni $\Phi^r_X \subseteq \Phi_X$.

Definizione 3.20. Un indice è x-riflessivo se è della forma i^x, $(x \in \{d,s\})$

Oltre l'usuale regola di chiusura (PNC) e il principio di bivalenza (PB) per la parte enunciativa delle formule introduciamo le corrispettive regole per gli indici LPNC e LPB

$$\frac{\begin{array}{c} j \in \Phi^d \\ j \in \Phi^s \end{array}}{\times} \tag{LPNC}$$

Questa regola afferma che nessun mondo può essere allo stesso tempo una versione ideale e una versione subideale di se stesso, mentre

$$\frac{}{X,j^d \qquad X,j^s}[j \text{ ristretto}] \tag{LPB}$$

stabilisce che un mondo è una versione ideale o subideale di se stesso.

Di seguito forniamo, come esempio, alcune dimostrazioni di teoremi di JP.

$$
\begin{array}{lll}
1. & F(\mathsf{O}^i(A \wedge B) \wedge \mathsf{O}^s(C \wedge D)) \rightarrow (A \vee C) & w_1 \\
2. & T\mathsf{O}^i(A \wedge B) \wedge \mathsf{O}^s(C \wedge D) & w_1 \\
3. & FA \vee C & w_1 \\
4. & T\mathsf{O}^i(A \wedge B) & w_1 \\
5. & T\mathsf{O}^s(C \wedge D) & w_1 \\
6. & FA & w_1 \\
7. & FC & w_1 \\
8. & TA \wedge B & (D_1, w_1) \\
9. & TC \wedge D & (S_1.w_1) \\
10. & TA & (D_1, w_1) \\
11. & TB & (D_1, w_1) \\
12. & TC & (S_1.w_1) \\
13. & TD & (S_1.w_1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
14.\ T \quad w_1^d & \qquad & 15.\ F \quad w_1^s \\
16.\ \times & & 17.\ \times
\end{array}
$$

Nel ramo di sinistra la chiusura segue da $TA, (D_1, w_1), FA, w_1$ e w_1^i, dopo aver assunto, via la versione concernente gli indici di PB, che w_1 è una versione ideale di se stesso, cioè, w_1^d; pertanto sostituiamo, in tale ramo, tutte le occorrenze di w_1 con w_1^d ottenendo così D_1, w_1^d e w_1^d che σ_{JP}-unificano; d'altra parte nel ramo di destra abbiamo $TC, (S_1, w_1), FC, w_1$ e w_1^s, possiamo quindi, anche in questo caso, applicare la procedura che abbiamo usato nell'altro ramo.

$$
\begin{array}{lll}
1. & F(\mathsf{O}^s A \wedge \neg A) \rightarrow \mathsf{P}^s \neg A & w_1 \\
2. & T\mathsf{O}^s A \wedge \neg A & w_1 \\
3. & F\mathsf{P}^s \neg A & w_1 \\
4. & T\mathsf{O}^s A & w_1 \\
5. & FA & w_1 \\
6. & T\mathsf{O}^s A & w_1^s \\
7. & FA & w_1^s \\
8. & TA & (S_1, w_1^s) \\
9. & \quad \times &
\end{array}
$$

I passi che conducono ai passi (1)-(5) sono immediati. (6)-(7) derivano tramite l'applicazione delle regola di riflessività, dato che il mondo denotato da w_1 è una versione subideale di se stesso. La chiusura dell'albero segue immediatamente da (7) e (8), dato che sono σ_{JP}-complementari (i loro indici σ_{JP}-unificano dato che $(S_1, w_1^s)\sigma^{\#}$).

$$\begin{array}{rll}
1. & F\mathsf{O}^i A \to (\mathsf{O}^s B \to (\neg A \to B)) & w_1 \\
2. & T\mathsf{O}^i A & w_1 \\
3. & F\mathsf{O}^s B \to (\neg A \to B) & w_1 \\
4. & T\mathsf{O}^s B & w_1 \\
5. & F\neg A \to B & w_1 \\
6. & FA & w_1 \\
7. & FB & w_1 \\
8. & & w_1^s \\
9. & & w_1^d \\
10. & & \times
\end{array}$$

Qui i passi (8) e (9) sono ottenuti, rispettivamente da (2), (6) e (4), (7) tramite RR e la chiusura del ramo viene inferita per LPNC dato che w_1 risulta essere sia una versione ideale sia una versione subideale di se stesso.

3.6 Proprietà degli indici e delle unificazioni

In questa sezione esamineremo delle proprietà dell'algebra degli indici che risulteranno utili nelle sezioni successive quando proveremo la completezza e la correttezza di KEM rispetto alle logiche appena presentate nella sezione precedente e per dimostrare alcune peculiarietà della procedura di dimostrazione automatica che forniremo nella sezione 3.8.

Definizione 3.21. Diciamo che i *estende* k ($i \trianglerighteq k$) sse esiste un $s(i)$ tale che

1. $s(i) = k$, o
2. $(s(i), k)\sigma_L$;

e che i *estende immediatamente* k sse $i \trianglerighteq k$ e $s(i) = b(i)$.

Nel paragrafo precedente abbiamo fornito le σ_L-unificazioni per le logiche L che trattiamo in questo lavoro. In particolare abbiamo definito cosa significa per una coppia di indici unificare. Adesso estendiamo la nozione a una coppia di indici rispetto a un insieme di indici.

Definizione 3.22. Dato un insieme di indici $\mathcal{L}$ diciamo che $(i,k)\sigma_L^{\mathcal{L}}$ se:

1. $(i,k)\sigma_L$, o
2. $\exists j \in \mathcal{L}$ tale che:
   - $(j, s^n(i))\sigma_L$,
   - $(j, s^m(k))\sigma_L$, e
   - $(c^n(i), c^m(k))\sigma_L$, con $w_0 = j$.

Fatto 1. Enunciamo senza dimostrare, data la loro ovvietà, una lista di proprietà degli indici e delle unificazioni. Da ora in poi utilizzeremo L per denotare una qualunque delle logiche esposte nella sezione 3.5.

1. $\forall i, j \in \Phi_C, (i,j)\sigma_L \iff i = j$;
2. $\forall i, j \in \Im, i = j \Rightarrow (i,k)\sigma_L = (j,k)\sigma_L$;
3. $\forall i, j \in \Im, (i,k)\sigma_D = (j,k)\sigma_D \Rightarrow (i,j)\sigma_D$;
4. $\forall i, j \in \Im, (i,j)\sigma_L = (j,i)\sigma_L$
5. se i è ground, $l = (i,j)\sigma_K \Rightarrow l = i$;
6. $\forall i, j \in \Im, (i,j)\sigma_K = l \Rightarrow (i,l)\sigma_K = (j,l)\sigma_K = l$;
7. Se $i \in \Phi_C$ e $k \in \Phi_V$ allora $(i,k)\sigma = i$;
8. Se i, k sono non ristretti e $(i,k)\sigma = l$ allora anche l è non ristretto.
9. $\forall i \in \Im \ (i,i)\sigma = i$.
10. Se $(i,k)\sigma_L$ e le coppie i, i' e k, k' sono strutturalmente isomorfi allora $(i',k')\sigma_L$.

In maniera analoga forniamo una lista dei rapporti fra le varie unificazioni

Fatto 2. Se $L_1 \subset L_2$ allora $(i,k)\sigma_{L_1} \Rightarrow (i,k)\sigma_{L_2}$.[28]

TEOREMA 3.2. *Se $(i,j)\sigma_L = l$ allora $(i,l)\sigma_L$, e $(j,l)\sigma_L$.*

[28] Per le relazioni di inclusione delle varie logiche si vedano, per esempio, (CHELLAS 1980, HUGHES AND CRESSWELL 1968, HUGHES AND CRESSWELL 1984).

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in due parti; nella prima proveremo il teorema per le logiche la cui σ_L segue lo schema delle definizioni 3.16 e 3.17. La struttura della σ_L-unificazione ci permette di dimostrare la proprietà per per induzione sul numero di applicazione della $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$ in una σ_L-unificazione. Sia n tale numero. Se $n = 1$ allora dovremo dimostrare la proprietà per $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$, vale a dire

$$(i,k)\sigma^{A_1 \cdots A_n} = l \Rightarrow (i,l)\sigma^{A_1 \cdots A_n}, (k,l)\sigma^{A_1 \cdots A_n} \ . \tag{3.8}$$

Nella seconda parte prenderemo in esame le logiche che hanno una definizione particolare della σ_L-unificazione.

Ricordiamo la definizione generale delle $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$-unificazioni

$$(i,k)\sigma^{A_1 \cdots A_n} = \begin{cases} (i,k)\sigma^{A_1} & C_1 \\ \vdots & \vdots \\ (i,k)\sigma^{A_n} & C_n \end{cases}$$

e quella delle σ_L-unificazioni

$$(i,k)\sigma_L = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{A_1 \cdots A_n} \\ (i,k)\sigma^{A_1 \cdots A_n} \end{cases}$$

dove $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_L$.

Dimostreremo la proprietà 3.8 per induzione sulla lunghezza degli indici[29].

Se $\min\{l(i), l(k)\} = 1$ allora assumeremo che $l(i) = 1$ (la dimostrazione per $l(k) = 1$ è simile, basta sostituire k al posto di i e viceversa).

1) i è una costante ($i \in \Phi_C$). Se $l(k) = 1$, allora possiamo applicare σ^K; in ogni caso per le proprietà 1, 5, 6

$$l = (i,k)\sigma^K = i$$

ma per le stesse proprietà $(i,i)\sigma^K$ and $(i,k)\sigma^K$. Sappiamo dal fatto 2 che la σ^K-unificazione è inclusa in tutte le altre, pertanto questo caso risulterà

[29] Da ora in poi, al fine di accorciare le dimostrazioni, quando dovremo considerare indici di lunghezza differente assumeremo che il primo sia il più corto. Questo è possibile grazie alla simmetria delle unificazioni, vedi proprietà 4, pertanto il caso tralasciato verrebbe trattato in maniera analoga al caso realmente trattato.

dimostrato per tutte le unificazioni[30]. Se $l(k) > 1$ dobbiamo considerare le unificazioni per le logiche la cui caratterizzazione semantica contiene la riflessività o la simmetria.

Vediamo prima il caso in cui $A_1 \cdots A_n$ contiene T: se $(i,k)\sigma^T$, allora

$$l = (i,k)\sigma^T = (i, s^1(k))\sigma = i$$

quindi $(i,i)\sigma$ e $(i,k)\sigma^T$. Analogamente per $\mathcal{T}$ e R sostituendo a σ e σ^T rispettivamente $\sigma^{\mathcal{H}}$, $\sigma^{\mathcal{T}}$ per $\mathcal{T}$ e σ^+, σ^R per R.

Se $A_1 \cdots A_n$ contiene B avremo: $(i,k)\sigma^B$, da cui segue $l = (i,k)\sigma^B = (i, s^1(k))\sigma = i$, pertanto $(i,i)\sigma^K$ e $(i,k)\sigma^B$. Se $A_1 \cdots A_n = KB$ allora avremo che $h^2(k)$ per ipotesi. È importante notare che anche in questo caso è stato sufficiente provare il caso rispetto a K.

2) Se $i \in \Phi_V$ allora per le unificazione che contengono D, e per la definizione stessa di σ l'indice i unifica con qualunque indice e il risultato dell'unificazione sarà uguale a quest'ultimo $(i,k)\sigma^D = k = l$, quindi $(i,k)\sigma^D$ e $(k,k)\sigma^D$ per la proprietà 9 e il fatto che σ e σ^D coincidono.

Consideriamo ora il caso di $X = K, \mathcal{H}$: affinché i e k σ^X-unificano è necessario che $\forall n, n \leq l(k)$ o $h^n(i)$ o $h^n(k)$ sia in Den, risulta pertanto dall'ipotesi che $(i,k)\sigma^X$ che k è ground, quindi $l = k$ (per la proprietà 5) e $(k,k)\sigma^X$ (per la proprietà 6).

Supponiamo ora che $\min\{l(i), l(k)\} = n > 1$, e che la proprietà espressa da 3.8 valga fino a indici di lunghezza n. Avremo i seguenti casi:

$\sigma^{A_1 \cdots A_n} = \sigma^K, \sigma^D, \sigma^O, \sigma^+, \sigma^{\mathcal{H}}$
Sia $\sigma^X = \sigma^D, \sigma^+$. Se $l(i) = l(k)$ allora

$$(i,k)\sigma^X = l \qquad\qquad l(l) = l(i) = l(k)\ ;$$

per l'ipotesi induttiva

$$\begin{array}{ll} (b(i), b(l))\sigma^X & \qquad (b(k), b(l))\sigma^X, \\ (h(i), h(l))\sigma^X & \qquad (h(k), h(l))\sigma^X; \end{array}$$

[30] Si noti che σ^K è un caso particolare di σ, e quindi anche di σ^+ e $\sigma^{\mathcal{H}}$.

pertanto $(i,l)\sigma^X$ e $(k,l)\sigma^X$. La dimostrazione per K e $\mathcal{H}$ segue dal fatto che l contiene solo elementi denotanti, in particolare avremo

$$h^n(l) = \begin{cases} h^n(i) & h^n(i) \in \mathrm{Den} \\ h^n(k) & h^n(k) \in \mathrm{Den} \end{cases}$$

vale a dire che ogni elemento di i e k o è un elemento denotante che occorre nello stesso posto in cui occorre in l o è una variabile, ma se è una variabile nel corrispondente posto di l avremo un elemento denotante, quindi in ogni caso $(i,l)\sigma^K$ e $(k,l)\sigma^K$, e $(i,l)\sigma^{\mathcal{H}}$ e $(k,l)\sigma^{\mathcal{H}}$. Il caso di O deriva direttamente dai casi per D e per K, infatti σ^O è una combinazione delle unificazioni σ^D e σ^K.

$A_1 \cdots A_n = DT$
Se $l(i) < l(k)$ e $(i,k)\sigma^T = l$, allora per ipotesi induttiva

$$(b(i), b(l))\sigma^D \qquad\qquad (s^{l(b(i))}(k), b(l))\sigma^D$$

Per la definizione di σ^T sappiamo che

$$l^n = (h(i), h(k))\sigma = (h(i), h^{l(i)}(k))\sigma)$$

quindi $(i,l)\sigma^D$ e $(k,l)\sigma^T$. Il caso in cui $l(i) = l(k)$ è il caso appena esaminato per D.

$A_1 \cdots A_n = K4, D4, DT4$
Se $l(i) < l(k)$ e $h(i) \in \Phi_V$, allora $(i,k)\sigma^4 = c^{l(i)}(k)$ dove $w_0 = (i, s^{l(i)}(k))\sigma$. Per l'ipotesi induttiva e la definizione di σ^4 abbiamo

$$(i, s^{l(i)}(l))\sigma \qquad\qquad (s^{l(i)}(k), s^{l(i)}(l))\sigma$$

e quindi $(i,l)\sigma^4$ e $(k,l)\sigma^K$ per σ^{K4}, e σ^D per gli altri casi. Si noti che per σ^{K4} è sufficiente notare che i, e k soddisfacevano le condizioni richieste e che tutte le variabili in l sono denotanti, dato che soddisfano anche in questo caso le suddette condizioni. L'altra clausola di σ^{D4} è corrisponde al caso di D, mentre per σ^{DT4} abbiamo anche il caso appena dimostrato per T.

$A_1 \cdots A_n = KB, DB, DTB$
Se $l(i) < l(k)$ e $(i,k)\sigma^B = l$, per l'ipotesi induttiva

$$(b(i), b(l))\sigma^D \qquad\qquad (s^{l(b(i))}(k), b(l))\sigma^D$$

quindi per la definizione di σ^B, abbiamo

$$h(l) = (h(i), h(k))\sigma = (h(i), h^{l(i)-2n}(i))\sigma) \ ;$$

pertanto $(i, l)\sigma^D$ e $(k, l)\sigma^B$. Per completare la dimostrazione del caso dobbiamo esaminare i casi per D per quanto riguarda σ^{DB}, e per σ^{DTB} anche il caso per T, che abbiamo già dimostrato. La dimostrazione per KB è identica tranne che $(i, l)\sigma^O$ e $(k, l)\sigma^B$ dove o $h^2(k)$ o $h^2(k) \in \mathrm{Den}$. Per la definizione di σ^{KB} $l = (i, s^l(i)(k))\sigma$, pertanto $l(l) = l(i) > 1$ e

$$h^2(l) = \begin{cases} h^2(i) & h^2(i) \in \mathrm{Den} \\ h^2(k) & h^2(k) \in \mathrm{Den} \ . \end{cases}$$

In ogni caso una delle teste di lunghezza due è denotante e quindi gli indici unificano.

$A_1 \cdots A_n = F$ e $A_1 \cdots A_n = DF$
il caso di F segue immediatamente dalla definizione, e una volta combinata con il caso di D otteniamo la dimostrazione per DF

$A_1 \cdots A_n = \mathcal{HT}, JP$
Supponiamo che $(i, k)\sigma^{\mathcal{HT}} = l$, per come è costruita tale unificazione avremo che 1) $(i, k)\sigma^{\mathcal{H}} = l$ o 2) $(i, k)\sigma^{\mathcal{T}} = l$. Nel primo caso i, k e l avranno la stessa lunghezza, inoltre

$$h^n(l) = \begin{cases} h^n(i) & \text{se } h^n(i) \in \Phi_C, \text{ e } h^n(k) = h^n(i) \text{ o } h^n(k) \in \Phi_V^{\square} \\ h^n(k) & \text{se } h^n(k) \in \Phi_C, \text{ e } h^n(i) = h^n(k) \text{ or } h^n(i) \in \Phi_V^{\square} \\ h^n(i) & h^n(i), h^n(k) \in \Phi_V^{\square} \end{cases}$$

Per induzione abbiamo

$$(b(i), b(k))\sigma^{\mathcal{H}} \qquad\qquad (b(i), b(k))\sigma^{\mathcal{H}}$$

e per costruzione

$$(h(i), h(l))\sigma^{+} \qquad\qquad (h(k), h(l))\sigma^{+} \ ,$$

quindi in ogni caso $(i, l)\sigma^{\mathcal{H}}$ e $(k, l)\sigma^{\mathcal{H}}$.

Nel secondo caso invece, assumiamo come di consueto che i è il più corto, di conseguenza abbiamo che $l(l) = l(i)$. Per l'ipotesi induttiva e il fatto che $(i,k)\sigma^{\mathcal{T}}$ avremo

$$(b(i), b(l))\sigma^{\mathcal{H}} \qquad\qquad (b^{l(b(l))}(k), b(l))\sigma^{\mathcal{H}} \ .$$

Inoltre

$$\forall m \leq l(i), h(l) = (h(i), k^m)\sigma^{\square} \ .$$

Dato che sono indici di lunghezza 1 possiamo applicare il lemma e quindi $(h(i), h(l))\sigma^{+}$,[31] pertanto $(i,l)\sigma^{\mathcal{H}}$ e dunque $(i,l)\sigma^{\mathcal{HT}}$. D'altra parte si può estendere la proprietà 6 anche a $\sigma^{\square}$, da cui segue

$$\forall m \leq l(l), (h(l), k^m)\sigma^{\square} = (h(l), h(k))\sigma^{\square} \ ,$$

dunque $(k,l)\sigma^{\mathcal{T}}$ e quindi $(i,k)\sigma^{\mathcal{HT}}$.

La dimostrazione per JP ricalca quella per $\mathcal{HT}$ tranne per avere $\sigma^{\#}$ al posto di $\sigma^{\square}$ e di richiedere σ^{+} al posto di $\sigma^{\mathcal{H}}$.

Abbiamo così provato la base induttiva per per la prima parte del teorema. Assumiamo ora che il lemma valga fino all'n-esima applicazione di $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$. Per la definizione di σ_L,

$$(s^n(i), s^m(k))\sigma_L = w_0 = s^l(l) \qquad\qquad (c^n(i), c^m(k)j)\sigma^{A_1 \cdots A_n} = c^l(l) \ ,$$

ma, per l'ipotesi induttiva

$$(s^n(i), s^l(l))\sigma_L \qquad\qquad (s^m(k), s^l(l))\sigma_L \ .$$

Per la proprietà che abbiamo appena provato per $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$

$$(c^n(i), c^l(l))\sigma^{A_1 \cdots A_n} \qquad\qquad (c^m(k), c^l(l))\sigma^{A_1 \cdots A_n}$$

che implica $(i,l)\sigma_L$ e $(k,l)\sigma_L$.

$L = K5, D5$
Per ipotesi $(i,k)\sigma_{K5} = l$, quindi o $(i,k)\sigma^{O}$ o $(i,k)\sigma^{5}$. Abbiamo già provato il teorema per σ^{O}, quindi consideriamo solamente il caso in cui i due indici

[31] È facile vedere che se due indici $\sigma^{\square}$-unificano σ^{+}-unificano, in quanto una unificazione è la restrizione dell'altra; inoltre si può provare il lemma per $\sigma^{\square}$ ripetendo gli stessi passi fatti per σ.

σ^5-unificano; questo implica che uno dei segmenti di lunghezza due è in Den. Supponiamo che sia $h^2(i)$ (il caso in cui $h^2(k) \in$ Den è analogo). Abbiamo da esaminare i seguenti casi: se $h^2(i) \neq h(i) \in \Phi_V$, allora $h(l) = h(k)$ se k è ristretto, altrimenti $h(l) = h(i)$; nel primo caso $(i, l)\sigma^5$-unificano dato che i soddisfa le condizioni dell'unificazione, e $(k, l)\sigma^5$ dato che le due teste coincidono. Se $h(i) \in \Phi_C$ o $l(i) = 2$ allora, affinché $(i, k)\sigma_{K5}$, $h^2(k) \neq h(k) \in \Phi_V$, e possiamo ripetere il ragionamento fatto nel caso precedente con k al posto di i. La dimostrazione per σ_{D5} è la stessa di quella per σ_{K5} tranne che non dobbiamo preoccuparci di come sono i segmenti di lunghezza 2.

$L = K45, D45$
Per ipotesi $(i, k)\sigma_{K45}$, pertanto uno dei segmenti di lunghezza 2 è denotante e $h(l) = (h(i), h(k))\sigma$; ma questo significa che o $h(l) = h(i)$ o $h(l) = h(k)$, inoltre dato che è il risultato di una unificazione è denotante. Se $h(l) \in \Phi_C$ allora abbiamo le seguenti possibilità: 1) $h(l) = h(i) = h(k)$, in questo caso il lemma vale banalmente; 2) se $h(i) \neq h(k)$ e $h(i) = h(l)$ (il caso in cui $h(k) = h(l)$ è analogo), allora $(h(i), h(l))\sigma$ ma affinché $(i, k)\sigma_{K45}$ $h(k) \in \Phi_V$ e pertanto anche in questo caso $(k, l)\sigma_{K45}$. Se $h(l) \in \Phi_V$ significa che $h(i), h(k) \in \Phi_V$, ma $l(l) = 2$ e $h(l) \in$ Den e pertanto $(i, l)\sigma_{K45}$ e $(k, l)\sigma_{K45}$.

La dimostrazione per $D45$ è identica tranne che possiamo trascurare il fatto che $h(l) \in$ Den.

$L = K4B, S5, S5A$
Per $S5$ se $\min\{l(i), l(k)\} = 1$ abbiamo $(i, k)\sigma_{S5}$ sse $(h(i), h(k))\sigma$, da cui, se i è ristretto

$$(i, k)\sigma_{S5} = h(i) = l$$

e quindi $(i, l)\sigma_{S5}$, vale a dire $(h(i), h(i))\sigma$ possiamo ripetere lo stesso ragionamento se k è ristretto. se i non è ristretto

$$(i, k)\sigma_{S5} = h(k) = l$$

pertanto per gli stessi motivi del caso precedente $(k, l)\sigma_{S5}$ e $(i, l)\sigma_{S5}$. Se $\min\{l(i), l(k)\} > 1$, avremo che

$$(i, k)\sigma_{S5} = ((h(i), h(k))\sigma; (s^1(i), s^1(k))\sigma)$$

e possiamo ripetere il ragionamento appena fatto. Infatti $(s^1(i), s^1(k))\sigma$ implica che $s^1(i)$ e $s^1(k)$ devono essere la stessa costante, quindi il risultato della loro unificazione è sempre la stessa costante; ci rimane da controllare le varie possibilità per le teste, ma sono le stesse che abbiamo già esaminato.

Per $K4B$ basta notare che se $(i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_{K4B}$ allora in $\mathcal{L}$ c'è un indice il cui segmento di lunghezza 2 è denotante; per il resto $S5$ e $K4B$ sono identiche.

$S5A$ estende $S5$ unicamente per il fatto che l'indice $a \in \Phi_C$, quindi per la definizione di ρ, abbiamo che $\rho(a) = a$ come qualunque altra costante.

Le unificazioni per le logiche OM, DM, $OS4$, $DS4$, OMB, KUB, OUB, DUB, $OMUB$, DMUB sono ottenute come combinazione di casi particolari di O, D, T, B e 4, imponendo condizioni sugli indici, in particolare sulla loro lunghezza. Tuttavia tali restrizioni sono soddisfatte in maniera necessaria e sufficiente dal risultato dell'unificazione di i e k e pertanto il teorema vale anche per esse. □

Dal teorema 3.2 appena dimostrato otteniamo i seguenti

Corollario 3.3. *Sia* $\mathcal{L} = \{i, j, k, l\}$ *un insieme di indici; se* $(i,j)\sigma^{\mathcal{L}}_L = l$ *e* $(k,l)\sigma^{\mathcal{L}}_L$*, allora* $(i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_L$ *e* $(j,k)\sigma^{\mathcal{L}}_L$

Dimostrazione. L'indice l stesso è un indice $\mathcal{L}$ per cui $(i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_L$ and $(j,k)\sigma^{\mathcal{L}}_L$. □

Corollario 3.4. *Sia* $\mathcal{L} = \{i, j, k\}$ *un insieme di indici; se* $(i,j)\sigma_L$*,* $(k,j)\sigma_L$ *e* $(i,k)\sigma_L$*, allora* $((i,k)\sigma_L, j)\sigma^{\mathcal{L}}_L$

Dimostrazione. Dalla definizione 3.22 dobbiamo mostrare un indice tale che unifichi con $(i,k)\sigma_L$ e j, ma dal teorema 3.2 sappiamo che i e k unificano con entrambi. □

Questo corollario afferma che quando due indici di una collezione unificano ed entrambi unificano con un terzo allora quest'ultimo unifica con il risultato dell'unificazione della coppia di indici; questo significa che se pensiamo gli indici come dei mondi con i percorsi che portano a essi, allora possiamo concepire l'unificazione come la strada che conduce a uno dei mondi denotato da entrambi gli indici (con possibili deviazioni).

Corollario 3.5. *Sia* $\mathcal{L}$ *un insieme di indici. Se* $i = (W_n, j)$ *e* $i' = (w_n, j)$ *con* w_n *che non occorre altrove in* $\mathcal{L}$*, sono in* $\mathcal{L}$*, allora*

$$\forall k \in \mathcal{L}, (i', k)\sigma_L \Rightarrow (i,k)\sigma^{\mathcal{L}}_L$$

Dimostrazione. Se $h(k) \in \Phi_C$ allora, dato che w_n non occorre in $\mathcal{L}$, $h(k) \neq w_n$ $L = KF, F$ dove è richiesto che $(j, b(k))\sigma_L$, ma, per KF una delle due teste è in Den e $b(i) = j$. Per le logiche che non richiedono che una delle due teste sia denotante $(i, k)\sigma_L$ banalmente. Per le altre l'indice i' è un indice adatto affinché $(i, k)\sigma_L^{\mathcal{L}}$. □

3.7 Correttezza e completezza di KEM

In questo paragrafo dimostreremo che le regole e le unificazioni che abbiamo dato per le logiche nel paragrafo 3.5 sono adeguate a caratterizzarle. In particolare dimostreremo che la versione in KEM delle varie logiche modali che abbiamo esaminato è equivalente alla corrispettiva versione hilbertiana. A tal fine la dimostrazione è divisa in due parti. 1) Gli assiomi e le regole d'inferenza della versione assiomatica di L sono derivabili in KEM; dato che KEM gode della proprietà della sotto dimostrazione[32] possiamo simulare qualunque dimostrazione ottenibile con il metodo assiomatico. 2) Le regole di inferenza di KEM sono corrette per la semantica per il rispettiva logica modale. Da 1) e 2) otteniamo il risultato desiderato.

Sia

$$\mathcal{F} = \langle W, \Sigma_1, \dots \Sigma_m, R_1, \dots, R_n \rangle$$

una struttura di Kripke estesa con cluster e sia $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, v \rangle$ un modello di Kripke esteso con le seguenti condizioni:

- $\mathcal{W} = \Phi_C$;
- $\Sigma_i \subseteq \mathcal{W}, 1 \leq i \leq m$;
- ogni $R_i, 1 \leq i \leq n$ è una relazione binaria in $\mathcal{W}$;
- v è la funzione di valutazione.[33]

[32]La proprietà della sotto dimostrazione afferma che se esiste una dimostrazione per A, allora questa può essere usata all'interno di una qualunque altra dimostrazione.

[33]Chiaramente, a seconda della logica considerata R_i sarà una determinata condizione e le condizioni su v saranno quelle appropriate, cfr. cap 2.

Sia g una funzione da $\Im$ a $\wp(\mathcal{W})$ così definita:

$$g(i) = \begin{cases} h(i) = \{h(i)\} & h(i) \in \Phi_C \\ h(i) = \{w_i \in \mathcal{W} : g^*(b(i))B_{l(b(i)),l(i)}w_i\} & h(i) \in \Phi_V \\ h(i) = \{w_i \in \mathcal{W} : g^*(b(i))B_{l(b(i)),l(i)}w_i\} \neq \emptyset & h(i) \in \Phi_V \cap \text{Den} \\ i = \mathcal{W} & i \in \Phi_V \end{cases}$$

Dove g^* è una funzione di scelta in $g(i)$ e $B_{m,m+1} = R_k, 1 \leq k \leq n$, se $i^{m+1} \in \Im_1^k$. In particolare, se i è ristretto e $l(i) > 1$ avremo

$$g(i) = \{h(i)\} \subseteq \{w_i \in \mathcal{W} : g^*(b(i))B_{l(b(i)),l(i)}w_i\} \ .$$

Sia r una funzione da $\Im$ a $\bigcup_{1 \leq k \leq n} R_k$ così definita:

$$r(i) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } l(i) = 1 \\ g^*(i^1)B_{1,2}g(i^2), \ldots, g^*(i^{n-1})B_{n-1,n}g(h(i)) & \text{if } l(i) = n > 1 \end{cases}$$

Sia f una funzione dall'insieme delle LS-formule a v così definita:

$$f(SA, i) =_{def} v(A, w_j) = S$$

per tutti i $w_j \in g(i)$.

Lemma 3.6. *Per ogni $i, k \in \Im$ se $(i,k)\sigma_L$, allora $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Anche questa dimostrazione, come la dimostrazione del teorema 3.2, è divisa in due parti. Nella prima considereremo le logiche la cui unificazione caratteristica rispecchia lo schema della definizione 3.17, e nella seconda prenderemo in considerazione le altre unificazioni.

La dimostrazione è per induzione sul numero di applicazioni di $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$ in σ_L. Abbiamo bisogno quindi di dimostrare la seguente proprietà

$$\forall i, k \in \Im, (i,k)\sigma^L \Rightarrow g(i) \cap g(k) \neq \emptyset \tag{3.9}$$

che dimostreremo per induzione sulla lunghezza degli indici.

Se $\min\{l(i), l(k)\} = 1$, allora almeno uno tra i e k è o una costante o una variabile; per la definizione di unificazione avremo quindi i seguenti cinque casi: i e k sono:

i) due costanti; o

ii) una variabile e una costante, o

iii) due variabili, o

iv) una variabile e un indice, o

v) una costante e un indice.[34]

Caso i) Due costanti unificano se e solo se sono la stessa costante, quindi $i = k$; pertanto, dalla definizione di g, $g(i) = g(k)$,e dato che $\mathcal{W}$ non è vuoto per definizione $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Caso ii) se i (resp. k) è una variabile e k (resp. i) è una costante, allora $g(i) = \mathcal{W}$ e $g(k) \in \wp(\mathcal{W})$ e anche in questo caso $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Caso iii) Per questo caso è sufficiente notare che $\mathcal{W}$ non è vuoto e che le variabili sono applicate su esso.

Caso iv) Per le logiche seriali basta notare che $\mathcal{W}$ non è vuoto e che g assegna alla variabile $\mathcal{W}$ e all'indice un mondo (un insieme di mondi) in $\mathcal{W}$. Per le logiche non seriali in generale una variabile σ^L-unifica con un indice se l'indice contiene una costante in ogni posto in cui è richiesta una σ^K-unificazione. Dato che i due σ^L-unificano la denotazione dell'indice è vuoto e pertanto g assegna all'indice un mondo (un insieme di mondi) in $\mathcal{W}$.

Caso v) Questo caso contempla tutte le $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$-unificazioni che contengono σ^T, o σ^B o $\sigma^{\mathcal{T}}$ o σ^R. Come di consueto assumeremo, per economia, che $l(i) = 1$ e $l(k) = n > 1$ (il caso in cui $l(k) = 1$ e $l(i) = n > 1$ è analogo).

Se $(i, k)\sigma^T$, allora per ogni $h(s(k))$ tale che $l(s(k)) > 1$ o $h(s(k)) \in \Phi_V$, o $h(s(k)) = i$; quindi

$$r(k) = iRk^2, \ldots, k^{n-1}Rk^n$$

Se $k^2 \in \Phi_V$, allora k^2 denota l'insieme di mondi accessibili da w_1; se $k^2 \in \Phi_C$, allora $i = k$, ma, per la riflessività $i \subseteq k^2$, quindi possiamo prendere i stesso come rappresentante dell'insieme di mondi denotato k^2, che implica iRk^3. Ripetiamo lo stesso ragionamento fino a quando non arriviamo a iRk^n: se $k^n \in \Phi_C$, allora $i = k^n$ e quindi denotano lo stesso mondo; se $k^n \in \Phi_V$, allora

[34] I casi ii), iii), e iv) non si presentano nel corso di dimostrazioni in KEM; in ogni caso essi sono utili per trattare casi nel passo induttivo della dimostrazione, e nella dimostrazione del caso v).

quest'ultimo denota l'insieme di mondi accessibili da i; ma i appartiene a tale insieme per la riflessività, quindi, in ogni caso, $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Se $(i,k)\sigma^{DB}$ o $(i,k)\sigma^{KB}$, allora

$$h(k) \in \Phi_V \qquad\qquad (i,h(k))\sigma = (i,s^1(k))\sigma$$

con $h^p(k) \in \Phi_V, \forall p > m = ((n-1)/2)+1$, inoltre per KB avremo che $h^2(k) \in \text{Den}$, questo e la serialità per DB garantiscono che tutti gli elementi sono denotanti, infatti, come abbiamo già ricordato la simmetria implica la quasi serialità. La relazione di R determinata da k è così descritta

$$r(k) = k^1Rk^2, \ldots, k^{m-1}Rk^m, k^mRk^{m+1}, k^{m+1}Rk^{m+2}, \ldots, k^{n-1}Rk^n$$

$k^1 = i$, e, per la condizione imposta dall'unificazione avremo che k^{m+1} denota l'insieme di mondi accessibili da k^m; per la simmetria k^mRk^{m-1}; quindi

$$k^1Rk^2, \ldots, k^{m-1}Rk^{m+2}, \ldots, k^{n-1}Rk^n\ .$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento fintanto che arriviamo a

$$iRk^2, k^2Rk^n$$

dove k^n denota l'insieme di mondi accessibili da k^2, ma per simmetria k^2Ri dunque i è un mondo accessibile da k^2, quindi $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Se $(i,k)\sigma^{\mathcal{T}}$, allora per ogni $h(s(k))$ tale che $l(s(k)) > 1$ o $h(s(k)) \in \Phi_V^{\Box}$, o $h(s(k)) = i$; quindi

$$r(k) = iB_{1,2}k^2, \ldots, k^{n-1}B_{n-1,n}k^n$$

Inoltre avremo $xR_1y \Rightarrow xR_2y$. A questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto per T.

Se $(i,k)\sigma^R$, allora per ogni $h(s(k))$ tale che $l(s(k)) > 1$ o $h(s(k)) \in \Phi_W$, o $h(s(k)) \in \Phi_D$ se $i \in \Phi^d$ o $h(s(k)) \in \Phi_S$ se $i \in \Phi^d$ o $h(s(k)) = i$; quindi

$$r(k) = iB_{1,2}k^2, \ldots, k^{n-1}B_{n-1,n}k^n$$

e

$$iR_ii \qquad\qquad i \in \Phi^d$$
$$iR_si \qquad\qquad i \in \Phi^d$$

Inoltre avremo $xR_{i,s}y \Rightarrow xRy$. A questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto per T.

Per il passo induttivo avremo $\min\{l(i), l(k)\} = n > 1$. assumiamo induttivamente che il lemma valga sino a indici di lunghezza n; se $l(i) = l(k)$ scriveremo rispettivamente i e k come $(h(i), b(i))$ e $(h(k), b(k))$. Se $(i,k)\sigma^D$, per la definizione di σ^D abbiamo $(b(i), b(k))\sigma^D$ per cui il lemma vale induttivamente; sia w_j uno dei mondi che appartengono a $g(b(i)) \cap g(b(k))$ quindi $w_jRh(i)$ e $w_jRh(k)$. Ci rimane da analizzare che tipo di indici sono $h(i)$ e $h(k)$, e abbiamo di nuovo i casi i), ii), e iii). I casi i) e ii) sono identici alla base induttiva, mentre per il caso iii) $h(i)$ e $h(k)$ denotano l'insieme di mondi accessibili da w_j, ma, per la serialità associata a D questo insieme non è vuoto. Lo stesso dicasi per σ^O.

Se $(i,k)\sigma^K$ ripetiamo il ragionamento fatto fatto per D tenendo presente che il caso iii) si presenta unicamente se $h(i)$ o $h(k) \in$ Den, ma in tale caso l'insieme dei mondi visti da w_j nuovamente non è vuoto, per la definizione di g.

Se $(i,k)\sigma^F$, $(i,k)\sigma^{DF}$, allora $l(i) = l(k) = 2$, $(s^1(i), s^1(k))\sigma$ che ricade sotto l'ipotesi induttiva; sia w il mondo condiviso. Per la definizione di r avremo

$$wRi^2 \qquad\qquad wRk^2$$

dove i^2 e k^2 appartengono all', o sono l'insieme di mondi visti da w. Dato che R è funzionale avremo che $g(i^2) = g(k^2)$. Nel caso di DF questo insieme non è vuoto per la serialità, mentre nel caso di F è richiesto che o $h(i)$ o $h(k) \in$ Den quindi per costruzione l'insieme non è vuoto. In ogni caso $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Se $(i,k)\sigma^+$, o $(i,k)\sigma^{\mathcal{H}}$ allora potremo ripetere la dimostrazione fatta a proposito di σ^D e σ^K; infatti σ^+ è la versione multimodale di σ^D tenendo presente la condizione $xR_jy \Rightarrow xRy, 1 \leq j \leq n$, vale a dire che l'insieme di mondi accessibili da un mondo dato tramite la relazione R_j è un sottoinsieme di quello dei mondi visti tramite la relazione R, inoltre R_j è seriale. $\sigma^{\mathcal{H}}$ risulta dalla combinazione delle condizioni di σ^K per quanto riguarda i mondi accessibili tramite la relazione R_1 (non seriale) e l'unificazione σ^+ per la relazione R_2 che è seriale, inoltre anche in questo caso i rapporti tra le unificazioni sono stabiliti dalla seguente $xR_1y \Rightarrow xR_2y$.

Se $l(i) \neq l(k)$, assumeremo che $l(i) < l(k)$ (il caso $l(k) < l(i)$ è analogo)

Se $(i,k)\sigma^T$ e $h(i) \in \Phi_C$ allora per la definizione di σ^T avremo che

$$(i,k)\sigma^T = (c^{l(i)}(i), c^{l(i)}(k))\sigma^T$$

dove $w_0 = (i, s^{l(i)}(k))\sigma^D$; quindi per ipotesi induttiva $g(i) \cap g(s^{l(i)}(k)) \neq \emptyset$; sia w_j uno dei mondi condivisi. A questo punto possiamo ripetere il ragionamento fatto per la base induttiva per il caso di T e otteniamo risultato desiderato.

Se $h(i) \in \Phi_V$, allora

$$\forall k^n, n \leq l(i), (h(i), h(k))\sigma = (h(i), k^n)\sigma$$

che significa $g(i) \cap g(s^n(k)) \neq \emptyset$, e in particolare $g(i) \cap g(s^{l(i)}(k)) \neq \emptyset$, dato che per ipotesi induttiva e la definizione di σ^T, $(b(i), s^{l(b(i))}(k))\sigma^D$.

Se $(i,k)\sigma^{D4}$, $(i,k)\sigma^{K4}$ allora $h(i) \in \Phi_V$ e $(b(i), s^{l(i)-1}(k))\sigma^D$, per il quale vale l'ipotesi induttiva; sia w_j uno dei mondi in comune. Inoltre avremo

$$\begin{aligned} & w_j R i^n \\ & w_j R k^n, k^n R k^{n+1}, \ldots \end{aligned}$$

i^n denota l'insieme di tutti i mondi accessibili da w_j; per transitività $\forall m > n, g(h^m(k)) \subseteq i^n$. Nel caso di $D4$ avremo che $i^m \neq \emptyset$ in virtù della serialità e quindi $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$. Per $K4$ avremo i seguenti due casi 1) $\forall m > n, k^n \in$ Den e quindi per costruzione $g(k^m) \neq \emptyset$; 2) o i o $s^{l(i)}(k)$ è p,q-convergente, ma questo, in regime di transitività, significa che

$$\exists p < n : h^p \in \Phi_V, \text{ e } \forall w_p \in g(h^p) \exists w_q : w_p R w_q$$

$g(h^p)$ è l'insieme di mondi visti da $g^*(h^{p-1})$, ma per questo insieme se esiste allora è un insieme di mondi in cui la relazione di accessibilità è transitiva e seriale. L'esistenza di tale insieme è garantita per induzione dal fatto che $(b(i), s^{l(i)-1}(k))\sigma^K$. Dunque in ogni caso $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Se $(i,k)\sigma^B$ e $l(i) \leq l(k)$ allora $h(k) \in \Phi_V$ e $(i, s^{l(i)}(k)))\sigma$, che ricade sotto l'ipotesi induttiva; sia w_j un mondo che appartiene alla loro intersezione. A questo punto possiamo ripetere il ragionamento che abbiamo fatto al caso v) della base induttiva per B e KB ottenendo $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Se $(i,k)\sigma^{\mathcal{T}}$ e $h(i) \in \Phi_C$ allora per la definizione di $\sigma^{\mathcal{T}}$ avremo che

$$(i,k)\sigma^{\mathcal{T}} = (c^{l(i)}(i), c^{l(i)}(k))\sigma^{\mathcal{T}}$$

dove $w_0 = (i, s^{l(i)}(k))\sigma^{\mathcal{H}}$; possiamo combinare le dimostrazioni appena fatta per i casi precedenti per ottenere il risultato desiderato.

Se $h(i) \in \Phi_V^{\Box}$, allora

$$\forall k^n, n \leq l(i), (h(i), h(k))\sigma^{\Box} = (h(i), k^n)\sigma^{\Box}$$

Per ipotesi induttiva e la definizione di $\sigma^{\mathcal{T}}$, $(b(i), s^{l(b(i))}(k))\sigma^{\mathcal{H}}$, sia w_j uno dei mondi condivisi; avremo

$$\begin{aligned} &w_j B_{n-1,n} g(h(i)) \\ &w_j B_{n_1,n} g(h^{l(i)}(k)), \ldots \end{aligned}$$

ora $g(i) \cap g(s^n(k)) \neq \emptyset$, dato che

$$g(h(i)) = \{w_n : w_j R w_n\} \qquad h^{l(i)}(k) \notin \Phi_V^{\mathcal{H}} \qquad xR_1y \Rightarrow xR_2y$$

Inoltre $(h(i), h(k))\sigma^{\Box} = (h(i), k^n)\sigma^{\Box}$ quindi $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Se $(i, k)\sigma^R$ e $h(i) \in \Phi_C$ allora per la definizione di σ^R avremo che

$$(i, k)\sigma^R = (c^{l(i)}(i), c^{l(i)}(k))\sigma^R$$

dove $w_0 = (i, s^{l(i)}(k))\sigma^{+}$; possiamo quindi ripetere il ragionamento fatto per i casi precedenti e per la base induttiva della stessa unificazione.

Se $h(i) \in \Phi_V$, allora

$$\forall k^n, n \leq l(i), (h(i), h(k))\sigma^{+} = (h(i), k^n)\sigma^{\#}$$

Per ipotesi induttiva e la definizione di σ^R, $(b(i), s^{l(b(i))}(k))\sigma^{+}$, sia w_j uno dei mondi condivisi; possiamo ripetere il ragionamento fatto per la base induttiva per T, inoltre

$$\forall m > l(i), (h(i), k^m)\sigma^{\#} = (h(i), k^{l(i)})\sigma^{+}$$

che significa $g(i) \cap g(s^n(k)) \neq \emptyset$, e in particolare $g(i) \cap g(s^{l(i)}(k)) \neq \emptyset$. Dunque $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Tutte le altre logiche esposte nel paragrafo 3.5, e la cui σ_L-unificazione rispecchia la definizione 3.17 possono venire dimostrate come combinazioni o casi particolari delle unificazioni che abbiamo appena dimostrato. In particolare per le unificazione delle logiche del paragrafo 3.5.2 notiamo che sono ottenute dagli assiomi **M** e **UB** che caratterizzano semanticamente la quasi-riflessività e la quasi-simmetria. Queste relazioni sono delle restrizioni della riflessività e della simmetria. Le unificazioni corrispondenti tengono conto di queste restrizioni imponendo delle condizioni sulla lunghezza degli indici, e quindi sul numero di passi prima di poter applicare liberamente la relazione.

Abbiamo così dimostrato la proprietà 3.9. Se σ_L consiste in un singolo passo di $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$, allora

$$(i,k)\sigma_L = (i,k)\sigma^{A_1 \cdots A_n}$$

quindi dalla proprietà 3.9 otteniamo $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Assumiamo induttivamente che il lemma valga fino all'n-esima applicazione di $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$. Se σ_L consiste in $n+1$ applicazioni di $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$-unificazioni, allora

$$(i,k)\sigma_L = (c^i(i), c^k(k))\sigma^{A_1 \cdots A_n}$$

dove $(s^i(i), s^k(k))\sigma_L$, contiene n applicazioni di $\sigma^{A_1 \cdots A_n}$, e quindi ricade sotto l'ipotesi induttiva. Possiamo a questo punto ripetere il ragionamento che abbiamo fatto per dimostrare 3.9 rispetto a

$$(c^i(i), c^k(k))\sigma^{A_1 \cdots A_n}$$

provando così che $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$.

Adesso dimostriamo il teorema per quelle logiche che hanno una definizione particolare della σ_L.

Se $(i,k)\sigma^5$ allora assumiamo che $l(i) > 2$. In base alla euclideicità avremo una relazione di equivalenza tra i mondi visti da un mondo e i mondi visti da mondi visti da quest'ultimi[35]. Questa unificazione richiede che $(s^1(i), s^1(k))\sigma$, che soddisfa le condizioni del teorema; sia quindi w_0 il mondo condiviso. Dai percorsi di i e k otteniamo

$$\begin{gathered} w_0 R i^2, \ldots, g(h(b(i))) R g(h(i)) \\ w_0 R k^2, \ldots, g(h(b(k))) R g(h(k)) \end{gathered}$$

In base alla euclideicità questi si riducono a

$$\begin{gathered} w_0 R i^2, i^2 R g(h(i)) \\ w_0 R k^2, k^2 R g(h(k)) \end{gathered}$$

[35]Si veda la spiegazione a pagina 77.

Ora

$$g(i) = \{w_n : w_0 R w_n,\} \cup \{w_m : w_n R w_m\}$$

e analogamente per $g(k)$ se $h(k) \in \Phi_V$, altrimenti è un sottoinsieme dell'insieme sopra definito. Ci rimane da mostrare che l'insieme $g(i)$ non è vuoto, ma questo viene garantito dalla serialità per σ_{D5} e, per σ_{K5} per costruzione dato che o $h^2(i)$ o $h^2(k) \in \mathrm{Den}$. Il caso in cui $h(i) = h(k)$ segue dal caso i) della base induttiva della prima parte.

Per σ^{45} avremo che ogni mondo determina una classe di equivalenza, la classe di equivalenza dei mondi che vede. Anche in questo caso abbiamo che l'unificazione richiede $(s^1(i), s^1(k))\sigma$, che soddisfa le condizioni del teorema; sia quindi w_0 il mondo condiviso. Dai percorsi di i e k otteniamo

$$w_0 R g(h(i))$$
$$w_0 R g(h(k))$$

Assumiamo che $h(i) \in \Phi_V$, allora $g(i) = \{w_n : w_0 R w_n\}$ da cui se $h(k) \in \Phi_V$ otteniamo lo stesso insieme altrimenti è un suo sottoinsieme non vuoto. Per $D45$ avremo che $g(i) \cap g(k) \neq \emptyset$ per la serialità, mentre per $K45$ segue dal fatto che $h^2(i)$ o $h^2(k) \in \mathrm{Den}$.

Se $(i, k)\sigma_{S5}$, consideriamo il caso in cui $h(i)$ è una variabile. Anche in questo caso abbiamo che l'unificazione richiede $(s^1(i), s^1(k))\sigma$, condizione che assicura che si tratta della stessa classe di equivalenza e inoltre soddisfa le condizioni del teorema; sia quindi w_0 il mondo condiviso. In base alle caratteristiche semantiche di questa logica $g(h(i)) = [w_0]$, dove $[w_0]$ è la classe di equivalenza secondo R di w_0. D'altra parte se $h(k) \in \Phi_V$, allora $h(k)$ denota la stessa classe, altrimenti un elemento di essa. Per $S5A$ basta notare che a è aggiunta all'insieme di costanti e denota l'unico mondo attuale, inoltre è accessibile da ogni mondo.

$K4B$, come abbiamo mostrato, è caratterizzata dai modelli che contengono punti terminali e classi di equivalenza. Dobbiamo accertarci quindi che i e k denotino o lo stesso mondo, il che avviene quando $i = k \in \Phi_C$ o quando $(s^1(i), s^1(k))\sigma$ e la classe di equivalenza non è vuota. Questo è ottenuto verificando che nel modello generato dagli indici c'è un mondo accessibile da i^1 o k^1, vale a dire se c'è un indice j che estende uno di questi e $h^2(j) \in \mathrm{Den}$.

Per $S5P_{(n)}$ notiamo che la struttura dell'unificazione è quella delle altre logiche che contengono **5** tranne per il fatto che usa σ^+ al posto di σ. Inoltre vengono rispettate alcune condizioni che garantiscono che gli indici di tipo n sono denotanti. Esaminiamole: supponiamo che i sia n-ground, allora avremo la seguente relazione

$$\ldots g(i^m) R_n g(w^n_{m+1}), \ldots, g(i^p) R_n g(W^n_{p+1}), \ldots$$

ma, in base alle condizioni semantiche di $S5P_{(n)}$

$$g(w^n_{m+1}) = \{w^n_{m+1}\} \subseteq \Sigma_n$$

ma questo significa che $\Sigma_n \neq \emptyset$, ma $g(W^n_{p+1}) = \Sigma_n$, quindi possiamo sempre applicare una funzione di scelta, cosa che non potremmo fare se $\Sigma_n = \emptyset$.

Se i e k non sono n-ground dobbiamo vedere se ci sono dei loro segmenti n-preferiti che $\sigma_{S5P_{(n)}}$-unificano. Se ci sono possiamo ripetere lo stesso ragionamento, e quindi $\Sigma_n \neq \emptyset$. □

Dalla dimostrazione del lemma segue il seguente corollario.

Corollario 3.7. *$\forall i, k \in \Im$, se $(i,k)\sigma_L$, allora $g((i,k)\sigma_L) = g(i) \cap g(k)$.*

Lemma 3.8. *$\forall i, k \in \Im$, se $f(X, i)$ e $(i,k)\sigma_L$, allora $f(X, (i,k)\sigma_L)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che il lemma non valga; pertanto

$$v(A, w_j) = S \qquad\qquad v(A, w_h) = S^C \tag{3.10}$$

per tutti i $w_j \in g(i)$ e $w_h \in g(k)$. Per il lemma 3.6 abbiamo

$$g(i) \cap g(k) \neq \emptyset \; ; \tag{3.11}$$

il corollario 3.7 e semplici considerazioni insiemistiche comportano

$$g((i,k)\sigma_L) \subseteq g(i) \; . \tag{3.12}$$

Ma 3.10, 3.11 e 3.12 implicano che esiste un mondo $w_m \in g((i,k)\sigma_L)$ tale che

$$v(A, w_m) = S \qquad\qquad v(A, w_m) = S^C$$

da cui otteniamo una contraddizione. □

Nel capitolo 2, teoremi 2.9, 2.11, 2.12, abbiamo dimostrato

$$\models_L A \iff \vdash_L A \; ;$$

dobbiamo quindi dimostrare da una parte che le regole di KEM sono ammissibili nei rispettivi calcoli assiomatici e dall'altra che gli assiomi, il modus ponens e la necessitazione sono derivabili in KEM

Teorema 3.9. $\vdash_L A \Rightarrow \vdash_{KEM(L)} A$.

Dimostrazione. Dimostriamo per prima cosa che gli assiomi proposizionali sono derivabili in KEM.

$$
\begin{array}{ll}
1.\ FA \to (B \to A) & w_1 \\
2.\ TA & w_1 \\
3.\ FB \to A & w_1 \\
4.\ TB & w_1 \\
5.\ FA & w_1 \\
6.\ \times & w_1
\end{array}
$$

In questa dimostrazione abbiamo fatto uso solamente delle regole α e di PNC.

$$
\begin{array}{ll}
1.\ F(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) & w_1 \\
2.\ TA \to (B \to C) & w_1 \\
3.\ F(A \to B) \to (A \to C) & w_1 \\
4.\ TA \to B & w_1 \\
5.\ FA \to C & w_1 \\
6.\ TA & w_1 \\
7.\ FC & w_1 \\
8.\ TB \to C & w_1 \\
9.\ TB & w_1 \\
10.\ TC & w_1 \\
11.\ \times & w_1
\end{array}
$$

Si noti che abbiamo applicato una β regola due volte utilizzando sempre A come premessa minore.

$$
\begin{array}{ll}
1.\ F(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A) & w_1 \\
2.\ T\neg A \to B & w_1 \\
3.\ F(\neg A \to B) \to A & w_1 \\
4.\ T\neg A \to B & w_1 \\
5.\ FA & w_1 \\
6.\ TB & w_1 \\
7.\ T\neg B & w_1 \\
8.\ \times & w_1
\end{array}
$$

Anche in questo caso abbiamo applicato due volte una regola β rispetto FA dato che in entrambe le β-formule occorreva $\neg A$. Per quanto riguarda le unificazioni si noti che in ogni caso gli indici che unificavano erano sempre w_1 e che σ_L-unifica con se stesso per tutte le logiche che abbiamo considerato.

Abbiamo dato le dimostrazioni in KEM degli assiomi caratteristici modali nel corso dei paragrafi dedicati alla caratterizzazione via KEM (paragrafi 3.5) di tali logiche. Mostriamo ora come il modus ponens e la necessitazione siano derivabili in KEM. Per il modus ponens avremo che se $\vdash_S A$ e $\vdash_S A \to B$ allora $\vdash_S B$, dove S è un calcolo. In particolare supponiamo che $S = KEM$ avremo quindi una dimostrazione in KEM sia di A che di $A \to B$; quindi gli alberi per FA (che chiameremo $\mathcal{T}_1$) e $FA \to B$ ($\mathcal{T}_2$) sono chiusi. Il seguente albero è una dimostrazione di B.

$$\begin{array}{c}
FB \quad w_1 \\
\begin{array}{ll|ll}
TA \to B & w_1 & FA \to B & w_1 \\
FA & w_1 & \mathcal{T}_2 & \\
\mathcal{T}_1 & & &
\end{array}
\end{array}$$

In questa dimostrazione si è fatto un uso essenziale di PB. L'albero risultante non è analitico; tuttavia D'Agostino e Mondadori (1994) hanno dimostrato che KE può essere ristretto, mantenendo la completezza, ad un uso analitico di PB, tale cioè che tutte le formule a cui PB si applica sono sotto formule delle formule che compaiono nell'albero. Mostriamo ora come la necessitazione sia derivabile in KEM. La regola di necessitazione stabilisce che se $\vdash_S$ allora $\vdash_S \Box A$. Anche in questo caso sia $\mathcal{T}$ l'albero chiuso per FA, i.

$$\begin{array}{lr}
1.\ F\Box A & w_1 \\
2.\ FA & (w_2, w_1) \\
3.\ \mathcal{T} &
\end{array}$$

Dobbiamo distinguere due casi il primo rispetto $Verum$, in cui l'albero per $F\Box A$ chiude per la regola che caratterizza tale logica; infatti abbiamo un indice ristretto che estende w_1 e quindi possiamo inferire la chiusura. Per tutte le altre logiche basta notare che possiamo porre $(w_2, w_1) = w_0$ e quindi ottenere un albero $\mathcal{T}'$ isomorfo a $\mathcal{T}$. Si noti infine che la dimostrazione della regola di necessitazione è analitica. $\Box$

Ci rimane da dimostrare che le regole di KEM sono corrette rispetto i modelli per le logiche in questione.

Teorema 3.10. *$\vdash_{KEM(L)} A \Rightarrow \models_L A$.*

Dimostrazione. Le regole α e PB sono ovviamente corrette in $\mathcal{M}$. Sia i l'indice rispetto al quale vengono applicate.

Per le α-regole supponiamo che $\alpha = TA \wedge B$ e $\alpha_1 = TA$, gli altri casi sono pressoché identici; supponiamo inoltre che non sia corretta, quindi α, i e $\alpha_n^C, i,\ n = 1, 2$. Se $w_j \in g(i)$, in base alla definizione di f avremo che

$$a)\ v(A \wedge B, w_j) = T \qquad\qquad b)\ v(A, w_j) = F$$

ma per le usuali clausole di valutazione proposizionale

$$v(A \wedge B, w_j) = T \iff v(A, w_j) = T,\ \text{e}\ v(B, w_j) = T$$

quindi

$$v(A, w_j) = T$$

che contraddice b).

Per PB abbiamo che una ramificazione in un tableaux corrisponde ad una disgiunzione, quindi supporre che PB non sia corretta equivale a dire che abbiamo congiuntamente le due clausole dei due rami. Se $w_j \in g(i)$, allora per la definizione di f

$$v(A, w_j) = T \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad v(A, w_j) = F$$

che chiaramente sono contraddittorie.

Per le regole β e PNC per ipotesi $(i, k)\sigma_L$ quindi per il lemma 3.2,

$$(i, (i, k)\sigma_L)\sigma_L \qquad\qquad (k, (i, k)\sigma_L)\sigma_L\ .$$

Per il lemma 3.8, le formule coinvolte avranno lo stesso valore in $g(i)$, $g(k)$ e in $g((i, k)\sigma_L)$ che, per il lemma 3.6, hanno almeno un mondo in comune, diciamo w_n; supponiamo che le regole non valgano avremo quindi, nel caso delle β-regole,

$$f(\beta, w_n) \qquad\qquad f(\beta_1^C, w_n) \qquad\qquad f(\beta_2^C, w_n)$$

ma

$$f(\beta, w_n) \iff f(\beta_1, w_n),\ \text{o}\ f(\beta_2, w_n)$$

da cui segue una contraddizione.

Per PNC avremo direttamente una contraddizione da

$$v(A, w_n) = S \qquad\qquad v(A, w_n) = S^C \ .$$

Per le regole ν_i supponiamo che $\nu_i = T\Box_i A$; per la definizione di f avremo

$$\forall w_j \in g(k), v(\Box_i A, w_j) = T$$

inoltre

$$r(k', k) = \ldots, g^*(k)R_i g(k')$$

ma

$$v(\Box_i A, w_j) = T \iff \forall w_m : w_j R_i w_m, v(A, w_m) = T$$

e

$$(\forall w_m : w_j R_i w_m, v(A, w_m) = T) = f(\nu_0, k')$$

con k' non ristretto.

Per le regole π_i supponiamo che non valga; sia $\pi_i = T\Diamond_i A$, e sia $w_j \in g(k)$, quindi avremo

$$v(\Diamond_i A, w_j) = T$$

d'altra parte per assurdo avremo

$$\forall w_k \in g((k', k)), v(A, w_k) = F$$

ma $g((k', k))$ è l'insieme di mondi accessibili via R_i da w_j, quindi, per la clausola di valutazione della logica modale avremo

$$v(\Box_i \neg A, w_j) = T$$

che equivale a

$$v(\Diamond_i A, w_j) = F$$

provocando quindi una contraddizione.

Per RV supponiamo per assurdo che non valga; avremo quindi che $g(i) = \{w_i : g^*(s^1(i))R\} \neq \emptyset$ dato che $h^2(i) \in \text{Den}$, questo significa che $\exists w : s^1(i)Rw$, ma $Verum$ è caratterizzata dalla classe di modelli in cui tutti i mondi sono punti terminali, ma $s^1(i)$ non lo è quindi abbiamo una contraddizione.

Per QPNC avremo che, secondo f,

$$\forall w_n : g^*(b(i))Rw_n, v(Q, w) = F$$

ma questo significa che

$$\neg\exists w_n : g^*(b(i))Rw_n, v(Q,w) = T$$

contrariamente alla O-serialità imposta sul modello.

Per $T\mathsf{N}_D$ basta notare che è una regola di tipo ν per l'operatore N_D. Mentre $F\mathsf{N}_D$ corrisponde alla riscrittura nei termini che definiscono l'operatore N_D.

Per TND sappiamo dal lemma 3.2 e dal lemma 3.6 che $g(i)$, $g(j)$ e $g((i,j)\sigma_{JP})$ hanno un mondo in comune, diciamo w_n. Avremo, se $X = TA$ (il caso $X = FA$ è analogo, basta sostituire $\neg A$ ad A,

$$\forall w_d \in g((D,i)), v(A, w_d) = T \qquad \forall w_s \in g((S,j)), v(A, w_s) = T$$

questo comporta

$$\forall w_d : w_n R_i w_d, v(A, w_d) = T \qquad \forall w_s : w_n R_s, v(A, w_s) = T$$

da cui otteniamo, per le clausole della valutazione

$$v(\mathsf{O}^i A, w_n) = T \qquad v(\mathsf{O}^s A, w_n) = T \ .$$

Dall'equivalenza di $\mathsf{O}^i A \wedge \mathsf{O}^s A \equiv \mathsf{N}_D A$ abbiamo

$$v(\mathsf{N}_D A, w_n) = T$$

che corrisponde a $T\mathsf{N}_D A, (i,j)\sigma_{JP}$. Ci rimane da applicare la regola $T\mathsf{N}_D$ e otteniamo il risultato voluto.

Per RR assumiamo che $\nu_{\{i,s\}} = \mathsf{O}^i A$ (di nuovo gli altri casi sono analoghi). Supponiamo per assurdo che la regola non valga. L'insieme dei mondi accessibili da un dato mondo è partizionato in due classi disgiunte, quelli che sono una versione ideale e quelli che sono una versione subideale dal mondo da cui sono visti. Inoltre ogni mondo è una versione ideale o una versione subideale di se stesso, vale a dire o wR_iw o wR_sw ma non entrambi. Un indice i^d significa che i è una versione ideale di se stesso, $g(i)R_ig(i)$; e i^s che i è una versione subideale di se stesso, $g(i)R_sg(i)$. Avremo quindi che nessun mondo in $g(m)$ non è una versione subideale di se stesso, pertanto ogni mondo in $g(m)$ è una versione ideale di se stesso. Per i lemma 3.6, 3.2 abbiamo che le denotazioni di i, j e m hanno almeno un mondo in comune, chiamiamolo w_n, dal lemma 3.8 dalle ipotesi sappiamo che

$$v(\mathsf{O}^i A, w_n) = T \qquad v(A, w_n) = F \ ,$$

ma la prima stabilisce che

$$\forall w : w_n R_i w, v(A, w) = T$$

quindi non si da il caso che $w_n R_i w_n$, e pertanto w_n è una versione subideale di se stesso contrariamente a quanto supposto.

Per LPNC sappiamo dalla condizione **C1** che nessun mondo è contemporaneamente una versione ideale e subideale di se stesso. Supponendo che la regola non valga avremo che

$$g(i)R_i g(i) \qquad\qquad g(i)R_s g(i)$$

ma

$$\forall w(wR_i w \iff \neg wR_s w)$$

e quindi abbiamo una contraddizione.

Per LPB basta notare che è il duale di LPNC. □

Dai teoremi 2.9, 2.11, 2.12, 3.9, e 3.10 otteniamo

TEOREMA 3.11. $\vdash_{KEM(L)} A \iff \models_L A$.

3.8 Procedura di dimostrazione

KEM è un sistema per refutazione: una dimostrazione di una formula A in una logica L consiste in un tentativo fallito di costruzione di un contromodello per A, assumendo che A sia falsa in un certo modello per L Infatti un tentativo di dimostrazione che ha successo produce una contraddizione nel contromodello. In questo paragrafo mostreremo un algoritmo per costruire dimostrazioni in *KEM* che fornisce una procedura di dimostrazione per le logiche in questione, e che è facilmente implementabile in PROLOG[36].

Da ora in avanti con l'espressione *KEM-albero* intenderemo un albero binario generato dalle regole d'inferenza di *KEM*[37].

[36]Per l'implementazione in PROLOG di *KEM* si vedano (ARTOSI, CATTABRIGA AND GOVERNATORI 1995, CATTABRIGA 1996).

[37]Per le varie nozioni connesse alla nozione di albero binario e per le loro proprietà si veda (SMULLYAN 1968b).

Definizione 3.23. Un ramo τ di un KEM-albero è σ_L-*chiuso* se il ramo termina con una applicazione di PNC, RV, QPNC, LPNC. Un KEM-albero $\mathcal{T}$ è σ_L-*chiuso* se tutti i suoi rami sono σ_L-chiusi. Infine, una L-dimostrazione di una formula A è un KEM-albero σ_L-chiuso la cui origine è FA, i, dove i è un indice ground.

Definizione 3.24. Sia τ un ramo di un KEM-albero. Una LS-formula X, i è E-*analizzata in* τ se si presenta una delle seguenti condizioni:

1. X è di tipo α, α_1, i e α_2, i occorrono entrambe in τ;
2. X è di tipo β e si verifica una della seguenti condizioni:
   (a) se β_1^C, k occorre in τ e $(i,k)\sigma_L$, allora anche $\beta_2, (i,k)\sigma_L$ occorre in τ,
   (b) se β_2^C, k occorre in τ e $(i,k)\sigma_L$, allora anche $\beta_1, (i,k)\sigma_L$ occorre in τ;
3. X è di tipo ν_i e $\nu_0, (m, i)$ occorre in τ per un certo $m \in \Phi_V$ che non ricorre precedentemente in τ;
4. X è di tipo π_i e $\pi_0, (m, i)$ occorre in τ per un certo $m \in \Phi_C$ che non ricorre precedentemente in τ.

Definizione 3.25. Una formula A, i è PB-*analizzata* in un ramo τ se $A^C, k \in \tau$, allora non si da il caso che $(i,k)\sigma_L^{\mathcal{L}_\tau}$; dove $\mathcal{L}_\tau$ è la mappa degli indici che occorrono in τ.

Definizione 3.26. Sia τ un ramo di un KEM-albero. Una LS-formula di tipo β, β, i è *soddisfatta in* τ se per ogni indice k presente nel ramo τ e che σ_L-unifica con i, o β_1, k o β_2, k è in τ.

Una LS-formula di tipo β è *analizzata* in un ramo τ se è o E-analizzata o è soddisfatta.

Definizione 3.27. Un ramo τ di un KEM-albero è E-*completo* se ogni LS-formula che compare in esso è E-analizzata; un ramo τ è *completo* se è E-completo, tutte le formule di tipo β sono analizzate o non possono essere analizzate, e non ci sono formule che non sono PB-analizzate.

Un KEM-albero è *completo* se tutti i rami sono completi.

La seguente procedura inizia dall'albero la cui origine è FA, i, dove A è la formula da dimostrare, e i è un indice ground, quindi vengono applicate le regole di KEM, in ragione della logica in esame, fino a che l'albero o è chiuso o è completo.

I passi che utilizzeremo per costruire un KEM-albero sono descritti nella seguente procedura.

Procedura 3.1.

(i) si sceglie un ramo aperto non completo τ. se τ non è E-completo, allora

(ii) si applicano le regole ad una premessa finché τ diventa E-completo.

(iii) Se il ramo risultante τ' non è né completo né chiuso, allora si applicano le regole a due premesse τ fintanto che il ramo non risulta E-completo.

(iv) Se il ramo risultante τ' non è né completo né chiuso, allora si scelga una β-formula non ancora analizzata nel ramo, e si applica PB in modo tale da aprire due rami contenenti rispettivamente β_1, i' e β_1^C, i' (o, equivalentemente β_2, i' e β_2^C, i'), dove $i = i'$ se i è ristretto, oppure $(i, i')\sigma_L$, o i' è ottenuto da i instanziando $h(i)$ su una costante che non occorre nell'albero[38].

(v) se il ramo non è né chiuso né E-completo dato che c'è almeno una coppia di formule (A, i e A^C, k) che non sono PB-analizzate. Controlliamo se nel ramo esiste un indice j ristretto tale che $(i, j)\sigma_L$, $(k, j)\sigma_L$ e $((i, j)\sigma_L, (k, j)\sigma_L)\sigma_L$. Se un tale indice esiste o può essere costruito a partire dagli indici che compaiono nel ramo e dalla σ_L, allora il ramo è chiuso, altrimenti il ramo è completo.

Sia $\mathcal{L}_\tau$ l'insieme degli indici che occorrono in τ; un indice k è costruito a partire da $\mathcal{L}_\tau$ se: $\exists i, j \in \mathcal{L}_\tau$ tale che $k = c^n(i)$ dove $w_0 = j$ se

- $(s^n(i), j)\sigma_L$, e
- j è l'indice di una formula di tipo β rispetto cui è stato applicato PB.

(vi) si ripete la procedura in ogni ramo generato da PB.

[38]Quest'ultima condizione non si applica alle K-logiche.

La procedura di dimostrazione per il caso modale differisce da quella per il proposizionale per il trattamento delle β-formule. Infatti la presenza di uno dei componenti di una β-formule, anche con l'appropriato indice, non è una condizione sufficiente per poter dire che la formula è analizzata nel ramo, altrimenti informazioni preziose sulla struttura del modello potrebbero andare perse, come mostra il seguente esempio in $S4$.

$$\begin{array}{lr}
A & w_1 \\
 & \vdots \\
\beta & (W_1, w_1) \\
\beta_1^C & (w_2, w_1) \\
\beta_2 & (w_3, w_1) \\
\psi & (w_4, (w_2, w_2)) \\
\psi^C & (W_2, (w_3, w_1)) \\
 & \vdots
\end{array}$$

dove $\beta_2 = \nu\psi^C$; questo albero non è chiuso dato che non ci sono formule σ_{S4} complementari, a meno di non applicare "intelligentemente" PB. Tuttavia se la condizione classica sulle formule di tipo β venisse rimpiazzata da quella modale l'albero avrebbe il seguente svolgimento:

$$\begin{array}{lr}
A & w_1 \\
 & \vdots \\
\beta & (W_1, w_1) \\
\beta_1^C & (w_2, w_1) \\
\beta_2 & (w_3, w_1) \\
\beta_2 & (w_2, w_1) \\
\psi & (w_4, (w_2, w_2)) \\
\psi^C & (W_2, (w_3, w_1)) \\
\psi^C & (W_3, (w_2, w_1)) \\
\times &
\end{array}$$

che implica direttamente la chiusura dell'albero.

Un esempio concreto di questa applicazione risulta nella dimostrazione in $S4$ della formula $\Box(\Box(A \to B) \to C) \to \Box(\Box(A \to B) \to \Box C)$, valida in ogni logica che contiene l'assioma **4**.[39]

1.	$F\Box(\Box(A \to B) \to C) \to \Box(\Box(A \to B) \to \Box C)$	w_1
2.	$T\Box(\Box(A \to B) \to C)$	w_1
3.	$F\Box(\Box(A \to B) \to \Box C)$	w_1
4.	$T\Box(A \to B) \to C$	(W_1, w_1)
5.	$F\Box(A \to B) \to \Box C$	(w_2, w_1)
6.	$T\Box(A \to B)$	(w_2, w_1)
7.	$F\Box C$	(w_2, w_1)
8.	FC	$(w_3, (w_2, w_1))$
9.	$TA \to B$	$(W_2, (w_2, w_1))$
10.	TC	(w_2, w_1)
11.	$F\Box(A \to B)$	$(w_3, (w_2, w_1))$
12.	$FA \to B$	$(w_4, (w_3, (w_2, w_1)))$
13.	$\times$	$(w_4, (w_3, (w_2, w_1))$

Infatti se invece di tener presente la condizione ci fossimo fermati al passo 7, dove abbiamo entrambi i componenti di 2, l'albero non sarebbe risultato chiuso contrariamente a quanto avviene.

Stabiliamo inoltre che una applicazione di PB soddisfa le β-formula rispetto a cui è applicato.

Nota 1. È noto che la perdita dell'analiticità è dovuta alla perdita della proprietà della sotto formula (debole)[40], e non alla presenza di un taglio ristretto alle sotto formule. In caso contrario ogni sistema di tableau risulterebbe non analitico dato che dalla formula $\neg(A \to B)$ otteniamo due rami contenenti rispettivamente $\neg A$ e B, ma, ovviamente, $\neg A$ non è una sotto formula immediata (forte) di $\neg(A \to B)$. Inoltre un uso intelligente e regolato del taglio può ridurre drasticamente la complessità delle dimostrazioni[41]. Infine può essere usato come condizione di chiusura in un contesto modale indicizzato. Infatti il passo (v) della procedura appena data, chiamato "PB modale", consiste nell'uso di PB rispetto alle formule complementari e un indice che unifica con entrambi gli indici delle formule complementari, permettendo così di chiudere il ramo.

[39]Si veda (Chellas 1980).

[40]Su questo punto si vedano (Smullyan 1968a, Fitting 1988).

[41](Boolos 1984, D'Agostino and Mondadori 1994)

3.8.1 Alberi canonici

La procedura che abbiamo definito nel paragrafo precedente può provocare dei loop a causa delle β-regole. Infatti è possibile avere in un ramo una formula β, i i cui componenti sono β_1 e β_2; inoltre nel ramo abbiamo, per esempio, β_1^C, e $\beta_2 = \#\beta_1^C$ è una funzione modale di β_1^C. Supponiamo inoltre di avere una unificazione così definita:

$$\forall i, k \in \Im, (i,k)\sigma_* = k \iff i = s(k) \ ;$$

supponiamo che $k \rhd i$ allora possiamo applicare le β-regola rispetto β, i e β_1^C, k ottenendo β_2, k; ma β_2 è una funzione modale di β_1^C, pertanto dopo averla analizzata otteniamo β_1^C, j con $j \rhd k$; se $j \rhd k$ allora $i = s(j)$ e possiamo applicare di nuovo la β-regola rispetto β, i e β_1^C, j ottenendo β_2, j rispetto la quale possiamo ripetere il ragionamento appena fatto e così via.

Per ovviare al problema appena esposto introduciamo gli alberi canonici, vale a dire alberi in cui non si può applicare una β-regola rispetto una formula di tipo β come premessa maggiore e una formula che dipende da essa come premessa minore.

Definizione 3.28.

- Ogni formula *dipende* da se stessa.
- Una formula B dipenda da A se è ottenuta da A o da formule che dipendono da quest'ultima mediante una applicazione delle regole α, ν_i e π_i;
- Una formula C dipende da A, B se è ottenuta mediante una applicazione di una regola β con A, B come premesse;
- se C dipende da A, B allora C dipende singolarmente da A e da B.

Definizione 3.29. Un KEM-albero è *canonico* se è costruito secondo la procedura 3.1 e viene utilizzata la seguente versione delle regole β:

$$\frac{\begin{array}{c}\beta, j\\ \beta_n^C, k\end{array}}{\beta_{3-n}, (j,k)\sigma_L}[(j,k)\sigma_L,\ n = 1,2]$$

dove β_n^C non dipende da β.

3.8.2 Terminazione degli alberi canonici

Gli alberi canonici godono di due importanti proprietà: 1) ogni albero canonico termina — dato che ogni formula ha un numero finito di sotto formule e che il numero degli indici in un KEM albero per un a formula A è limitato dal numero degli operatori modali che compaiono in A — e 2) per ogni KEM-albero chiuso esiste un KEM-albero canonico.

Sia ϕ una funzione che elimina gli operatori modali da una data formula; in particolare:

$\phi A = A$ se A è atomica

$\phi\neg A = \neg\phi A$

$\phi(A \to B) = \phi A \to \phi B$

$\phi(A \land B) = \phi A \land \phi B$

$\phi(A \lor B) = \phi A \lor \phi B$

$\phi\Box A = \phi A$

$\phi\Diamond A = \phi A$

LEMMA 3.12. $\nvdash_{KE} \phi A \ \Rightarrow \nvdash_{KEM(L)} A$

Dimostrazione. Il teorema 3.7 afferma che per ogni L, $\vdash_L A \Leftrightarrow \vdash_{KEM(L)} A$; dalle relazioni che intercorrono fra le varie logiche modali[42] abbiamo $\vdash_L A \ \Rightarrow \vdash_{Ban} A$, ma, dato che Ban collassa in PC, che è equivalente a KE,[43] ci rimane da mostrare come l'equivalenza $A \equiv \phi A$, vale in Ban. La funzione ϕ elimina da A tutte le occorrenze di operatori modali, ma in Ban abbiamo

$$\vdash_{Ban} \Box A \equiv A \qquad \text{e} \qquad \vdash_{Ban} \Diamond A \equiv A$$

quindi $\vdash_{Ban} \phi A \ \Leftrightarrow \vdash_{KE} \phi A$ da cui otteniamo facilmente il risultato desiderato. $\Box$

[42]Si veda, ad esempio, (CHELLAS 1980).
[43]Si veda (D'AGOSTINO AND MONDADORI 1994).

Questo lemma fornisce un primo controllo di terminazione per gli alberi canonici; infatti in un albero canonico dobbiamo controllare se ci sono formule proposizionalmente complementari e, in caso positivo, bisogna verificare che, nell'albero, non esiste un indice che unifica con entrambi gli indici delle formule proposizionalmente complementari, e che gli indici risultanti da queste unificazioni unificano tra loro. Se un siffatto indice esiste il ramo è chiuso, dato che è stato possibile trovare un mondo contraddittorio. D'altra parte se non ci sono formule complementari non ci saranno neppure formule σ_L-complementari.

Definizione 3.30. La complessità di una LS-formula è data dal numero di simboli che la compongono.

TEOREMA 3.13. *Ogni KEM-albero canonico termina.*

Dimostrazione. Mostriamo che ad ogni passo la procedura produce un numero finito di nuove LS-formule, dove con "nuove" intendiamo che l'indice non è stato usato in precedenza rispetto alla formula segnata a cui si applica. Inoltre la complessità delle formule prodotte è minore di quelle delle formule da cui sono ottenute.

La procedura per gli alberi canonici termina quando:

1. l'albero è chiuso;
2. tutte le LS-formule hanno complessità è maggiore di 1;
3. tutte le formule di tipo β sono state analizzate, o non possono essere analizzate;
4. tutte le formule sono PB-analizzate.

Dimostreremo il teorema per induzione sulla lunghezza della dimostrazione. Il punto fondamentale della dimostrazione risiede nel fatto che una volta che una formula di tipo α, ν e π è stata utilizzata essa non viene più presa in considerazione per la generazione di nuove formule. Lo stesso vale per coppie di formule a cui è possibile applicare una β-regola. Gli indici delle formule vengono considerati per veder se è possibile unificarli per applicare un passo di chiusura.

Al passo 0 la regola α produce due nuove LS-formule e le regole ν_i, and π_i producono una nuova LS-formula; la complessità delle formule ottenute è minore di quella della formula a cui sono state applicate; PB produce 2 rami e in ognuno di essi una LS-formula di complessità minore.

All'n-esimo passo una regola α produce al massimo due nuove LS-formule di complessità minore, e le regole ν_i, π_i producono una nuova LS-formula di complessità minore; una regola β produce al massimo m nuove LS-formule di complessità minore, dove m è il numero di LS-formule che sono la complementare di una sotto formula immediata di una formula di tipo β, il cui indice σ_L-unifica con quello della formula di tipo β, per induzione m è finito; infine PB produce 2 rami e in ognuno di essi una LS-formula di complessità minore.

Se non ci sono formule complementari, in virtù del lemma 3.12, l'albero è completo. Se ci sono dobbiamo vedere se sono PB-analizzate. A tal scopo dobbiamo cercare se esiste o è possibile costruire un indice ristretto che unifica con entrambi gli indici delle formule complementari, ma il numero degli indici ristretti che occorrono in un ramo è finito così come il numero di indici di formule a cui è stato applicato PB, dato che sono al massimo uguali al numero di LS-formule che compaiono nell'albero che abbiamo visto essere finito. □

Utilizzeremo $\mathcal{T}$ e $\mathcal{C}$ per denotare rispettivamente un KEM-albero e un KEM-albero canonico. Inoltre utilizzeremo $\vdash_{KEM} A$ per indicare che esiste un KEM-albero chiuso per A^C; analogamente $\vdash_{KEMc} A$ significa che esiste un KEM-albero canonico chiuso per A^C.

Teorema 3.14. $\vdash_{KEMc} A \iff \vdash_{KEM} A$

$\Rightarrow$. La direzione da sinistra verso destra è ovvia, dato che un KEM-albero canonico è un KEM-albero e che tutti i passi non essenziali possono essere tranquillamente eliminati.

$\Leftarrow$. Supponiamo che il teorema non valga, avremo quindi $\not\vdash_{KEMc} A$ e $\vdash_{KEM} A$. Dal lemma 3.12 e dalle proprietà di KE,[44] sappiamo che, nel corso della dimostrazione di A, PB viene applicata solamente a sotto formule delle formule date; pertanto tutte le occorrenze non essenziali di PB possono essere eliminate.

Le formule di tipo α, ν_i o π_i sono trattate nello stesso modo in $\mathcal{T}$ e $\mathcal{C}$. Le differenze tra un KEM-albero canonico e un KEM-albero risiedono nel trattamento delle formule di tipo β. Infatti gli alberi canonici richiedono

[44]Si veda (D'Agostino and Mondadori 1994)

che nessuna formula che dipende da una β-formula può essere usata con quest'ultima in una regola β. In un KEM-albero possiamo avere

$$\begin{array}{cll}
\vdots & & \\
\beta & i & (3.13) \\
\beta_1^C & j & (3.14) \\
\beta_2 & k, k = (i,j)\sigma_L & (3.15) \\
\vdots & & \\
[\phi(\beta_2), \psi(\beta_1^C)] & l & (3.16) \\
\psi(\beta_1^C) & m, m = (k,l)\sigma_L & (3.17) \\
\vdots & & \\
\beta_1^C & n, n \trianglerighteq m & (3.18) \\
\beta_2 & o, o = (i,n)\sigma_L & (3.19) \\
\vdots & & \\
\beta_2^C & p & (3.20)
\end{array}$$

dove $\phi(\beta_2)$ è una formula che dipende da β_2 e $\psi(\beta_1^C)$ è una funzione modale di β_1^C; e per ipotesi β_2, o e β_2^C, p sono σ_L-complementari, ma β_2, k e β_2^C, p non lo sono.

Il corrispondente albero canonico non ha β_2, o (3.19) dato che le sue regole impediscono di applicare una β regola rispetto β, i e β_C^1, n. Ma controlla che l'albero chiuda verificando che tutte lo formule siano PB-analizzate. Mostriamo ora che anche l'albero canonico è chiuso.

Sia $\mathcal{L}$ l'insieme di indici che compaiono nel ramo. Dal corollario 3.3 sappiamo che $(i,p)\sigma_L^{\mathcal{L}}$ dato che $(o,p)\sigma_L$ e $(i,n)\sigma_L = o$; per lo stesso motivo avremo anche $(p,n)\sigma_L^{\mathcal{L}}$. Dato che i e p σ_L-unificano possiamo applicare una β regola rispetto β, i e β_2^C, p ottenendo $\beta_1, (i,p)\sigma_L$. Le formule β_1^C, p e β_1, n non sono PB-analizzate, ma dal corollario 3.4 sappiamo che $(i,p)\sigma_L, n)\sigma_L^{\mathcal{L}}$ dato che $(i,n)\sigma_L$, $(i,p)\sigma^{\mathcal{L}}$, e $(n,p)\sigma_L^{\mathcal{L}}$, pertanto possiamo chiudere l'albero in conformità con il passo v della procedura 3.1. Si noti che questo passo corrisponde ad un'applicazione di PB rispetto a β_1 e β_1^C dove l'indice cui si applica è l'indice tale tale per cui $((i,p)\sigma_L^{\mathcal{L}}, n)\sigma_L^{\mathcal{L}}$.

Ci rimane ora da esaminare il caso di PB, infatti se abbiamo una formula di tipo β il cui indice è non ristretto possiamo avere differenti indici rispetto cui applicare PB, e nell'albero canonico potremmo aver scelto quello sbagliato; ricordiamo a tal proposito che una applicazione di PB soddisfa le formule rispetto cui viene applicata. In un KEM albero possiamo applicarla rispetto tutti gli indici. Sia i l'indice della β formula rispetto cui è stata applicata PB, e sia l l'indice rispetto cui PB è stata applicata in $\mathcal{T}$ e l' quello in $\mathcal{C}$, con $i \neq l$, $i \neq l'$; questo è possibile se i è non ristretto. Siano j e j' gli indici delle formule σ_L-complementari X e X^C in $\mathcal{T}$, assumiamo senza perdita di generalità che X, j e X^C, j' dipendono dall'applicazione di PB, in caso contrario i motivi della differenza tra i due alberi andrebbero ricercati altrove (vedi caso precedente). Per il lemma 3.12 avremo in $\mathcal{C}$ avremo X, k e X^C, k' con k e k' che non σ_L-unificano. Per le proprietà dei KEM-alberi, data la struttura delle regole di inferenza e delle regole di deduzione definite nella procedura 3.1 avremo che $c^k(k)$, $c^j(j)$ da una parte e $c^{k'}(k')$, $c^{j'}(j')$ dall'altra sono strutturalmente isomorfi, inoltre avremo che 1) $(c^j(j), c^{j'}(j'))\sigma_L$ da cui segue per la proprietà 10 $(c^k(k), c^{k'}(k'))\sigma_L$; 2) $s^j(j)$, $s^{j'}(j')$ σ_L-unificano con l; 3) $s^k(k)$ e $s^{k'}(k')$ σ_L-unificano con l'. Ma $(i, l')\sigma_L$, e, ovviamente, per la struttura di i questo $\sigma_L^{\mathcal{L}}$-unifica con qualunque indice che σ_L-unifica con l' (corollario 3.5); dunque $s^k(k)$ e $s^{k'}(k')$ σ_L-unificano con i, pertanto è possibile costruire un indice rispetto il quale X, k e X^C, k' non sono PB-analizzate, quindi l'albero è chiuso. $\square$

3.8.3 Considerazioni sugli alberi canonici

Senza la condizione che proibisce di usare una regola β rispetto una formula di tipo β e una formula che dipende da essa, è possibile che nel corso della dimostrazioni vengano duplicate inutilmente delle formule; per prevenire questo fatto bisogna elaborare delle strategie che riconoscono dei cicli[45].

Mostriamo come la condizione operi provando a refutare in $S4$ l'assioma di Löb; questa formula impone una relazione di carattere finito, ma la finitezza in una struttura transitiva e riflessiva corrisponde a dei cicli.

1. $F\Box(\Box A \to A) \to \Box A$	w_1
2. $T\Box(\Box A \to A)$	w_1
3. $F\Box A$	w_1
4. $T\Box A \to A$	(W_1, w_1)
5. FA	(w_2, w_1)
6. $F\Box A$	(w_2, w_1)
7. FA	$(w_3, (w_2, w_1))$

[45]Si vedano ad esempio (Kripke 1963, Hughes and Cresswell 1968, Fitting 1983, Demri 1995).

Se non avessimo applicato la condizione sulle regole β rispetto $T\Box A \rightarrow A, (W_1, w_1)$ e $FA, (w_3, (w_2, w_1))$ avremmo ottenuto $F\Box A, (w_3, (w_2, w_1))$; ma da questa avremmo derivato la premessa minore della stessa regola β; quindi avremmo dovuto applicarla di nuovo derivando $F\Box A, (w_4, (w_3, (w_2, w_1)))$ e così di seguito.

Analogamente, per quanto visto per $S4$, è possibile ottenere questo tipo di loop in altre logiche. Ad esempio, in B abbiamo

$$\begin{array}{lr}
1.\ F(A \rightarrow \Box\Diamond A) \rightarrow \Box\Diamond\neg A & w_1 \\
2.\ TA \rightarrow \Box\Diamond A & w_1 \\
3.\ F\Box\Diamond\neg A & w_1 \\
4.\ F\Diamond\neg A & (w_2, w_1) \\
5.\ TA & (W_1, (w_2, w_1)) \\
6.\ T\Box\Diamond A & w_1 \\
7.\ T\Diamond A & (w_3, w_1) \\
8.\ TA & (W_2, (w_3, w_1))
\end{array}$$

A questo punto potremmo ripetere il ragionamento fatto nel caso dell'assioma di Löb.

Il passo v della procedura di dimostrazione controlla che tutte le formule siano PB-analizzate. Il procedimento per cui se c'è una coppia di formule possiamo chiudere il ramo corrisponde sostanzialmente ad una applicazione di PB rispetto alle due formule, una complementare dell'altra, con l'indice rispetto al quale entrambi i loro indici unificano. In questo modo otteniamo due rami ognuno dei quali chiude dato che abbiamo due formule σ_L-complementari.

Ad esempio esaminiamo la seguente dimostrazione in K.

$$\begin{array}{lr}
1.\ T(\Diamond B \wedge \Box A \wedge \Box\neg A) & w_1 \\
2.\ T\Diamond B & w_1 \\
3.\ T\Box A & w_1 \\
4.\ T\Box\neg A & w_1 \\
5.\ TB & (w_2, w_1) \\
6.\ TA & (W_1, w_1) \\
7.\ FA & (W_2, w_1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
8.\ TA \quad (w_2, w_1) & 9.\ FA \quad (w_2, w_1) \\
10.\ \times & 11.\ \times
\end{array}$$

Dopo aver visto un caso in cui l'indice era già presente nell'albero mostriamo un caso, in $S4$, in cui l'indice viene costruito.

$$\begin{array}{ll}
1.\ F\Diamond((\Box(A \vee \Diamond\neg B) \vee \Box B) \wedge (C \vee D)) \vee \Diamond\neg C & w_1 \\
2.\ F\Diamond((\Box(A \vee \Diamond\neg B) \vee \Box B) \wedge (C \vee D)) & w_1 \\
3.\ F\Diamond\neg C & w_1 \\
4.\ F(\Box(A \vee \Diamond\neg B) \vee \Box B) \wedge (C \vee D) & (W_2, w_1) \\
5.\ TC & (W_3, w_1)
\end{array}$$

6. $T\Box(A \vee \Diamond\neg B) \vee \Box B$	w_1	7. $F\Box(A \vee \Diamond\neg B) \vee \Box B$	w_1
8. $FC \vee D$	w_1	11. $F\Box(A \vee \Diamond\neg B)$	w_1
9. FC	w_1	12. $F\Box B$	w_1
10. $\times$		13. $FA \vee \Diamond\neg B$	(w_2, w_1)
		14. FB	(w_3, w_1)
		15. $F\Diamond\neg B$	(w_2, w_1)
		16. TB	$(W_4, (w_2, w_1))$
		17. $\times$	$(w_3, (w_2, w_1))$

Possiamo applicare PB rispetto w_1 dato che $((W_2, w_1), w_1)\sigma^T$; per la stessa ragione chiudiamo il ramo di sinistra.

Nel ramo di destra abbiamo

$$i = (w_3, w_1) \qquad\qquad j = (W_4, (w_2, w_1))$$

che da soli non σ_{S4}-unificano; tuttavia abbiamo l'indice (W_2, w_1) che è un indice di una formula a cui è stato applicato PB e che unifica con w_1, quindi possiamo rimpiazzare in i w_1 con (W_2, w_1) e otteniamo $(w_3, (W_2, w_1))$ che è un indice costruito secondo le prescrizioni del passo v e che σ_L-unifica con i e j. A questo punto possiamo chiudere il ramo ripetendo le osservazioni fatte nel precedente esempio.

Le condizioni che determinano quando una stringa di simboli di mondi è un indice non proibiscono ripetizioni di simboli all'interno di un indice. Le regole di inferenza di KEM che generano indici sono quelle in cui operiamo unificazioni o analizziamo una formula modale (ν_i, π_i). Tuttavia queste ultime introducono sempre degli indici nuovi. Sembrerebbe quindi che non possiamo avere più occorrenze di uno stesso simbolo di mondo in un indice nel corso di dimostrazioni, e che pertanto avremmo potuto limitarci a tali casi nelle definizioni delle varie unificazioni.

Nella prossima dimostrazione mostriamo come sia possibile generare in KEM un indice che contiene più occorrenze dello stesso simbolo di mondi. Forniamo un siffatto albero per T

1.	$F\Box(\neg A \to \Box(\neg A \to \Box(\neg A \to A))) \to \Diamond\Diamond\Diamond\Box A$	w_1
2.	$T\Box(\neg A \to \Box(\neg A \to \Box(\neg A \to A)))$	w_1
3.	$F\Diamond\Diamond\Diamond\Box A$	w_1
4.	$T\neg A \to \Box(\neg A \to \Box(\neg A \to A))$	(W_2, w_1)
5.	$F\Diamond\Diamond\Box A$	(W_3, w_1)
6.	$F\Diamond\Box A$	$(W_4, (W_3, w_1))$
7.	$F\Box A$	$(W_5, (W_4, (W_3, w_1)))$
8.	FA	$(w_2, (W_5, (W_4, (W_3, w_1))))$
9.	$T\Box(\neg A \to \Box(\neg A \to A))$	(w_2, w_1)
10.	$T\neg A \to \Box(\neg A \to A)$	$(W_6, (w_2, w_1))$
11.	$T\Box(\neg A \to A)$	$(w_2, (w_2, w_1))$
12.	$T\neg A \to A$	$(W_7, (w_2, (w_2, w_1)))$
13.	TA	$(w_2, (w_2, (w_2, w_1)))$
14.	$\times$	

Questo albero mostra come la monotonicità alfabetica di Gent (1993) sia necessaria solamente per le regole che introducono dei simboli di mondo nuovi. Si noti inoltre che una formula (FA) può essere utilizzata come premessa minore di una regola β liberamente, e che può essere usata anche rispetto a formule che dipendono da essa, ad esempio 10 e 12. La regola β viene applicata in quanto

$$((W_2, w_1), (w_2, (W_5, (W_4, (W_3, w_1)))))\sigma_T$$

dato che $((W_2, w_1), (W_3, w_1))\sigma_D$ e

$$(W_2, w_2)\sigma = (W_2, W_5)\sigma = (W_2, W_4)\sigma = (W_2, W_3)\sigma = w_2$$

3.9 Confronto con altri metodi di dimostrazione

Diversamente da quanto avviene con i sistemi basati sulla risoluzione (sia clausali che non clausali), e in generale con i "metodi di traduzione"[46], KEM

[46](Abadi and Manna 1986, Auffray and Enjalbert 1992, Ohlbach 1991)

lavora sull'intero linguaggio, evitando così di dover pre processare le formule. Inoltre lo schema degli indici rende il sistema flessibile consentendogli di trattare virtualmente ogni logica che è rappresentabile semanticamente con i modelli di Kripke. Si consideri ad esempio il trattamento della logica di Jones e Pörn JP, dove le regole specifiche trattano non solo la parte enunciativa delle formule ma anche gli indici in base alla loro struttura e relazioni con la parte enunciativa. Ad esempio, in questa logica abbiamo una regola addizionale di chiusura (LPNC)

$$\frac{i \in \Phi^d, i \in \Phi^s}{\times}$$

che afferma che non esiste nessun mondo che è allo stesso tempo una versione ideale e sub-ideale di se stesso. Questo è possibile grazie ad un'altra regola (RR) che ci permette di stabilire quando un mondo è una versione ideale (o sub-ideale) di se stesso. La rappresentazione via regole delle particolarità semantiche dei mondi si completa con altre due regole LPB e TND. La prima di queste

$$\overline{i^s \qquad i^d}$$

corrisponde alla partizione dei mondi accessibili in ideali e in sub-ideali, e, nel caso in questione, è il corrispettivo del principio di bivalenza classico. L'ultima regola

$$\frac{\begin{array}{c} X, (D, i) \\ X, (S, j) \end{array}}{X, (W, (i, j)\sigma_{JP}}$$

ci permette di determinare che qualche cosa vale universalmente dalla congiunzione della validità rispetto tutti i mondi di tutte le partizioni.

In questa prospettiva KEM è simile ai metodi che usano sequenti o tableaux[47]. Tuttavia esso presenta diversi vantaggi rispetto alla maggior parte dei sistemi di dimostrazione automatica basati sui sequenti o sui tableaux:

Come è risaputo, i tableaux, pur venendo considerati come uno dei paradigmi per la dimostrazione automatica non sono adeguati per un trattamento computazionale in quanto, per la loro stessa natura, comportano delle ridondanze, e quindi un aumento della complessità, dove per complessità si intende il numero dei passi necessari in una dimostrazione per un dato algoritmo. La maggiore efficienza di KE risulta dal fatto che ogni albero di

[47](Fitting 1983, Fitting 1988, Catach 1991, Massacci 1994, Goré 1995)

un tableaux può venire simulato da un albero di KE, ma non viceversa[48]; questo fatto deriva dall'assunzione essenziale di PB e di regole simili a quelle della deduzione naturale; queste regole, per la completezza dei tableaux non sono primitive e non sono derivabili per transitività di dimostrazioni. Esse inoltre eliminano le ridondanze; perdipiù la particolare struttura degli indici di KEM consente, a differenza dei sistemi che usano prefissi di tipo lineare[49], la completa permutabilità delle regole, in particolare di quelle che coinvolgono gli operatori intensionali, consentendo l'utilizzo 1) di spazi di ricerca ridotti 2) di procedure non uniformi[50]. Entrambi comportano la possibilità di sviluppare procedure di dimostrazione efficienti, tra cui vale la pena di menzionare l'eliminazione di duplicazioni inessenziali di formule e della conseguente mancanza di loop (cicli) nelle dimostrazioni (cfr. sezione precedente). Nella maggioranza dei sistemi, formule come $\Diamond\Box(A \to \Box\Diamond A)$ comportano dei loop, a differenza di quanto avviene con KEM come mostra il seguente albero in $S4$.

$$
\begin{array}{ll}
1.\ F\Diamond\Box(A \to \Box\Diamond A) & w_1 \\
2.\ F\Box(A \to \Box\Diamond A) & (W_1, w_1) \\
3.\ FA \to \Box\Diamond A & (w_2, (W_1, w_1)) \\
4.\ TA & (w_2, (W_1, w_1)) \\
5.\ F\Box\Diamond A & (w_2, (W_1, w_1)) \\
6.\ F\Diamond A & (w_3, (w_2, (W_1, w_1))) \\
7.\ FA & (W_2, (w_3, (w_2, (W_1, w_1)))) \\
8.\ \times & (w_2, (w_3, (w_2, (W_1, w_1))))
\end{array}
$$

Come si vede dalla struttura degli indici che compaiono nella dimostrazione, tutti i metodi che usano indici di tipo costante (stringhe non strutturate che rappresentano sequenze di singoli mondi) devono fornire dei metodi per trasferire le informazioni contenute nell'indice (W_1, w_1) in tutti i mondi che rappresenta. Questo normalmente avviene duplicando le formule che sono indicizzate con un indice corrispondente. I sistemi che come KEM usano variabili e unificazioni di stringhe[51] devono fronteggiare il problema che le variabili rappresentano insiemi di mondi e che quindi possono avere più unificatori ma non un unificatore generale. Questo problema viene affrontato

[48](D'Agostino and Mondadori 1994)
[49](Fitting 1983, Massacci 1994)
[50]Sui vantaggi dell'utilizzo di procedure non uniformi si veda (Demri 1995).
[51]Ad esempio (Ohlbach 1991, Wallen 1990, Pitt and Cunningham 1996).

o duplicando la variabile nella stringa[52] o nuovamente duplicando la formula. Il sistema di indici più simile a quello di KEM è quello di Jackson e Reichgelt (1989) che tuttavia non forniscono delle unificazioni e si appellano a ragionamenti "esterni" chiamando in causa esplicitamente la relazione di accessibilità. Ciò comporta, da un lato, che essi non riescono a provare la completezza per le logiche non seriali, dall'altro una notevole difficoltà nel trattare logiche la cui caratterizzazione semantica non è esprimibile al primo ordine.

Un ulteriore vantaggio di KEM consiste nel fornire una rappresentazione esatta del modello generato a partire da una formula. Questo fatto consente da una parte un'analisi dettagliate del fenomeno che si vuole studiare, e dall'altra si presta ad estensioni a nuove logiche studiando le relazioni tra i mondi attraverso lo studio della struttura degli indici e delle unificazioni.

[52](Ohlbach 1991)

CAPITOLO 4

Applicazioni al ragionamento normativo

4.1 Una logica deontica non monotonica

4.1.1 Introduzione

Uno dei settori di crescente interesse nel campo dello studio delle norme e dei sistemi normativi riguarda l'applicazione del ragionamento non-monotonico, e in particolare del ragionamento "defeasible". Metodi di ragionamento "ritrattabile"[1] si sono mostrati utili nel trattamento di molti aspetti del ragionamento normativo. Sono stati proposti diversi metodi e "framework" per formalizzare il ragionamento ritrattabile deontico[2]. Tuttavia, nonostante l'interesse per l'argomento non ne sono stati proposti trattamenti computazionali; questo può essere parzialmente imputato al fatto che, in generale, il ragionamento non-monotonico non si presta ad un trattamento computazionale; d'altra parte si è sostenuto che gli approcci computazionali alla ritrattabilità deontica che usano i metodi della programmazione logica non si adattano alle tecniche inferenziali usate dai sistemi di deduzione delle logiche non-classiche

In questo capitolo mostreremo come adattare KEM alla trattazione del ragionamento normativo ritrattabile con un approccio non basato né sul paradigma della programmazione logica né sull'esistente formalismo del ragionamento non-monotonico ma su un sistema di logica modale (epistemica) sviluppato da Meyer e van der Hoek (1992) per trattare il ragionamento non-monotonico in un contesto monotonico. Inoltre estenderemo l'approccio

[1]In questo lavoro tradurremo *defeasible* con *ritrattabile* in quanto, a nostro avviso, tale termine più si adatta al significato dell'espressione inglese *defeasible reasoning* in ambito deontico/normativo.

[2]Si vedano ad esempio (Asher and Bonevac 1996, Horty 1994, Jones 1991, McCarty 1994, Prakken 1996, Ryu and Lee 1991, Sartor 1991).

di Meyer e van der Hoek combinando, in un approccio multimodale, la logica da essi sviluppata con la logica deontica di Jones e Pörn (1985, 1986).

Le motivazioni sottostanti a questo approccio consistono nel proporre un linguaggio modale sufficientemente ricco per modellare differenti tipi di ritrattabilità deontica — in particolare, per rappresentare preferenze di norme in maniera tale da essere facilmente trattabili all'interno di KEM.

4.2 Rappresentazione dei default in $S5P_{(n)}$

Meyer e van der Hoek (1992) hanno proposto di trattare il ragionamento per default mediante la traduzione dei default usuali in formule di $S5P_{(n)}$. In particolare i default di Reiter (1980) $\frac{A:B}{C}$ vengono tradotti come $A \wedge \Diamond B \rightarrow P_i C$, intendendo: "se A è vero e B è considerato possibile, allora C è preferito". Analogamente, i default normali diventano $A \wedge \Diamond B \rightarrow P_i B$, e i default multipli $A_1 \wedge \Diamond B_1 \rightarrow P_1 C_1$, $A_2 \wedge \Diamond B_2 \rightarrow P_2 C_2 \ldots$ dove P_1 e P_2 sono operatori di preferenza che possono venire associati allo stesso insieme di mondi o a insiemi differenti. Meyer e van der Hoek estendono quindi questa rappresentazione con un meccanismo di revisione delle credenze per ritrattare le argomentazioni.

In questo capitolo, proporremo un approccio diverso, vale a dire analizzeremo i default e quindi gli assegneremo degli indici secondo le seguenti definizioni.

Definizione 4.1. Una base di conoscenza è una coppia ordinata $\langle F, d \rangle$ dove F è l'insieme dei fatti e D è un insieme di default normali $\frac{A:B}{B}$.

Ogni default $\frac{A:B}{B}$ in D viene tradotto nella formula

$$\Box(A \rightarrow B)$$

che abbrevieremo in $A \Rightarrow B$.

Sia D' l'insieme di tutte le formule che sono la traduzione dei default in D e siano $S_1, \ldots, S_n$ tutti i sottoinsiemi massimali di D' consistenti con l'insieme dei fatti F (formalmente $S_i \cup F \nvdash \bot$ e per nessun $S_j, S_i \subseteq S_j$).

L'idea chiave è quella di introdurre un operatore di preferenza P_i nel conseguente di ogni formula in $S_i \neq D'$, ottenendo $A \Rightarrow P_i B$ per ogni formula

$A \Rightarrow B$ in S_i. La base di conoscenza risultante è $\langle F, D_M \rangle$, dove D_M denota l'insieme delle formule modali ottenute da D' dopo aver assegnato le preferenze.

Come risultato di questa traduzione otteniamo che:

1. i default inclusi in un insieme S_i avranno la stessa preferenza, mentre i default inclusi in insiemi differenti hanno preferenze differenti (ovviamente, i default che sono inclusi in tutti gli insiemi riceveranno tutte le preferenze);

2. si prevengono le inconsistenze, dato che ai default in conflitto vengono assegnate preferenze differenti[3].

Banalmente, se $F \cup D'$ è consistente allora $D_M = D'$. Si noti che la nostra traduzione non ha bisogno della parte "giustificativa" del defaut, che veniva modalizzata come $\Diamond B$ da Meyer e van der Hoek (1992), dato che il meccanismo per assegnare le preferenze risolve le eventuali inconsistenze.

La traduzione proposta ci consente di eseguire inferenze cosiddette "scettiche" come, ad esempio, la seguente.

Esempio 4.1. La base di conoscenza consiste in

$$\left\langle \{p, q\}, \left\{ \frac{p : r}{r}, \frac{r : w}{w}, \frac{q : \neg w}{\neg w} \right\} \right\rangle$$

$$p, q, p \Rightarrow P_{\{1,2\}} r, r \Rightarrow P_1 w, q \Rightarrow P_2 \neg w.$$

È facile vedere che queste premesse implicano $P_1 w$ e $P_2(\neg w)$. La ritrattabilità è ottenuta revisionando gli indici dopo aver modificato la base di conoscenza. Supponiamo di aggiungere alla base il fatto w producendo la base

$$\left\langle \{p, q, w\}, \left\{ \frac{p : r}{r}, \frac{r : w}{w}, \frac{q : \neg w}{\neg w} \right\} \right\rangle$$

Da questa base otteniamo un solo insieme di default la cui conclusione è consistente con i fatti, e precisamente

$$\left\{ \frac{p : r}{r}, \frac{r : w}{w} \right\} \ .$$

Pertanto il risultato della traduzione sarà semplicemente

$$p, q, w, p \Rightarrow r, r \Rightarrow w \ .$$

[3]Questo approccio ricorda il trattamento dei default priorizzati di Brewka (1989, 1990).

Si noti che il modello che abbiamo proposto può venir esteso con un meccanismo per ordinare i default singoli — e/o insiemi di default — sulla base di una relazione d'ordine sui default singoli[4]. In questo lavoro, tuttavia, non ci occuperemo di meccanismi del genere, dato che il ragionamento normativo riflette spesso l'uso di combinazioni di tali meccanismi, che talvolta possono essere in conflitto fra loro.

Consideriamo un altro esempio, questa volta prettamente giuridico, che ricalca l'articolo 54 del Codice Penale, per mostrare il funzionamento del metodo.

Esempio 4.2. Agire per legittima difesa.
La seguente base di conoscenza contiene due regole in conflitto tra loro, la prima delle quali stabilisce che chi commette un torto è responsabile, e la seconda afferma che chi agisce per legittima difesa non è responsabile.

1a. Giovanni ha commesso un torto.

2a. Giovanni ha agito per legittima difesa.

3a. Giovanni ha ecceduto nella legittima difesa.

4a. Chi commette un torto è responsabile.

5a. Chi agisce per legittima difesa non è responsabile.

6a. Chi eccede nella legittima difesa è responsabile.

Questa situazione, astraendo dagli individui, viene rappresentata dalla seguente base di conoscenza:

1b. t

2b. d

3b. e

4b. $\dfrac{t : r}{r}$

5b. $\dfrac{d : \neg r}{\neg r}$

[4] Per un approccio che sfrutta una combinazione di controllo di consistenza e procedure di ordinamento si veda (Brewka 1989, Brewka 1990).

6b. $\dfrac{e : r}{r}$.

La traduzione modale è

1c. t

2c. d

3c. e

4c. $t \Rightarrow P_1 r$

5c. $d \Rightarrow P_2 \neg r$

6c. $e \rightarrow P_1 r$

Si vede immediatamente che essa implica senza contraddizioni le conclusioni $P_1 r$ e $P_2 \neg r$.

Se è presente solamente il fatto 1a., allora ci sarà un'unica preferenza che stabilisce la responsabilità; se e presente anche il fatto 2a, allora avremo due stati di preferenza, uno che stabilisce la responsabilità e l'altro che la nega, esattamente come si verifica quando sono presenti tutti i tre fatti. Stabilendo un ordine tra i default corrispondenti alle regole basato sulla specificità, otterremo nel primo caso, che Giovanni è responsabile, nel secondo che non è responsabile, ma che è di nuovo responsabile nel terzo.

4.3 Una logica multimodale per il ragionamento normativo ritrattabile

L'idea di trattare il ragionamento normativo ritrattabile mediante una combinazione di una logica deontica e di un meccanismo per il ragionamento non monotonico già esistenti è stata avanzata da McCarty (1994) e Prakken (1996). Alla luce di questa proposta combineremo la logica $S5P_{(n)}$ con la logica JP ottenendo così un formalismo in grado trattare regole ritrattabili nell'ambito del ragionamento normativo.

È immediato riconoscere che il sistema risultante è una logica multimodale di tipo $KD/K45/S5$ con gli operatori modali $\Box, \Diamond, P_1 \ldots P_n$, $\mathsf{O}^i, \mathsf{P}^i, \mathsf{O}^s$ P^s. Chiameremo questa logica DDL (da *defeasible deontic logic*). Un modello per DDL è quindi un modello esteso che include le caratteristiche dei modelli delle logiche che compongono DDL, vale a dire

$$\langle W, \Sigma_1, \ldots \Sigma_n, R, R_i, R_s, R_1, \cdots, R_n, v\rangle$$

dove $\Sigma_1, \ldots \Sigma_n, R, R_i, R_s$ e $R_j, (1 \leq j \leq n)$ sono come in precedenza. Questo implica che abbiamo una struttura in cui sono presenti differenti tipi di mondi, cioè:

- mondi possibili generici;
- mondi preferiti di n specie;
- mondi deontici, divisi a loro volta in[5] $\begin{cases} \text{mondi deonticamente ideali} \\ \text{mondi deonticamente subideali} \end{cases}$

rispettivamente corrispondenti agli operatori modali $\Box, P_j, \mathsf{N}_D, \mathsf{O}^i, \mathsf{O}^s$.

Il linguaggio di DDL permette di trattare casi concernenti la ritrattabilità deontica o solamente caratteristiche di JP. Per esempio il famoso paradosso di Chisholm (1963) può essere risolta facendo uso solamente delle caratteristiche di JP.

Esempio 4.3. Paradosso di Chisholm o paradosso dell'obbligo contrario al dovere (contrary-to-duty imperative).

1. Giovanni non deve mettere incinta Arabella.
2. Non aver messo incinta Arabella impegna Giovanni a non sposarla.
3. Aver messo incinta Arabella impegna Giovanni a sposarla.
4. Giovanni ha messo incinta Arabella.

Sono state proposte molte formalizzazioni di questo celebre paradosso[6]. Qui utilizzeremo una versione in termini di default.

1a. $\mathsf{O}_\mathsf{T}\neg A$

2a. $\dfrac{\neg A : \mathsf{O}_\mathsf{T}\neg B}{\mathsf{O}_\mathsf{T}\neg B}$

[5]Ricordiamo che con mondo ideale intendiamo mondo ideale rispetto ad un dato mondo.
[6]Si veda (Åqvist 1985).

3a. $\dfrac{A : \mathsf{O}_\mathsf{T} B}{\mathsf{O}_\mathsf{T} B}$

4a. A

Di conseguenza, la nostra traduzione di $F \cup D'$ diventa

1b. $\mathsf{O}_\mathsf{T} \neg A$

2b. $\neg A \Rightarrow (\mathsf{O}_\mathsf{T} \neg B)$

3b. $A \Rightarrow \mathsf{O}_\mathsf{T} B$

4b. A

che corrisponde sostanzialmente alla formalizzazione proposta da Jones e Pörn (1986). In questo caso si derivano sia $\mathsf{O}_\mathsf{T} B$ che $\mathsf{O}^i \mathsf{O}_\mathsf{T} \neg B$ (vale a dire che tutte le situazioni contemplano l'obbligo $\mathsf{O}_\mathsf{T} \neg B$, anche se nella situazione attuale, che è una situazione sub-ideale rispetto a se stessa, abbiamo $\mathsf{O}_\mathsf{T} B$).

Si noti che i condizionali deontici vengono tradotti in $\Box(A \rightarrow \mathsf{O}_\mathsf{T} B)$, ricordando in questo modo la proposta di Anderson (1956) di rappresentare logicamente queste espressioni come $\Box(A \rightarrow OB)$[7]. È facile verificare che (1a)–(4a) formano un insieme consistente e non ridondante come richiesto, e che quindi (1b)–(4b) rappresentano una traduzione adeguata di tale insieme; la consistenza dell'insieme originario non comporta alcuna preferenza.

Consideriamo ora il seguente esempio.

Esempio 4.4. Agire in due sistemi normativi differenti.

1a. Se Mustafà è mussulmano può essere poligamo.

2a. Se Mustafà è italiano, non può essere poligamo.

3a. Mustafà è un mussulmano italiano.

Questo insieme viene rappresentato mediante default come segue:

1b. $\dfrac{m : \mathsf{P}^i p}{\mathsf{P}^i p}$

2b. $\dfrac{i : \neg \mathsf{P}^i p}{\neg \mathsf{P}^i p}$

[7] Si veda (Åqvist 1985) per una discussione a proposito.

3b. $m \wedge i$.

La corrispondente traduzione modale è:

1c. $m \Rightarrow P_1 \mathsf{P}^i p$

2c. $i \Rightarrow P_2 \neg \mathsf{P}^i p$

3c. $m \wedge i$.

Da questa possiamo derivare rispetto alla preferenza P_1 (che stabilisce la priorità delle prescrizioni religiose) che Mustafà può essere poligamo ($P_1 \mathsf{P}^i p$), mentre rispetto la preferenza P_2 (che stabilisce una priorità delle prescrizioni del diritto italiano) non può esserlo ($P_2 \neg \mathsf{P}^i p$).

Esaminiamo infine un esempio di situazione in cui dobbiamo risolvere un conflitto e quindi scegliere tra due preferenze distinte.

Esempio 4.5. Un problema di galateo (Horty 1994).

1a. Si deve mangiare con coltello e forchetta.

2a. Gli asparagi non si mangiano con coltello e forchetta.

3a. Giovanni sta mangiando degli asparagi.

Forniamo direttamente la corrispondente traduzione modale.

1b. $e \Rightarrow P_1 \mathsf{O}_{\mathsf{T}} f$

2b. $e \wedge a \Rightarrow P_2 \mathsf{O}_{\mathsf{T}} \neg f$

3b. $e \wedge a$.

In questo caso dobbiamo utilizzare una procedura per comparare le due preferenze. Si vede immediatamente che dobbiamo scegliere la preferenza P_2 data la sua maggior specificità rispetto P_1.

Negli esempi precedenti abbiamo visto come funziona il metodo che abbiamo sviluppato per assegnare preferenze in maniera da risolvere casi di norme tra loro incompatibili. Tuttavia questi casi non sono gli unici casi di contraddittorio che si presentano in ambito giuridico, anzi sono una minoranza. I giudici sono chiamati a dirimere un contenzioso e ad esprimere un giudizio o su due norme tra loro incompatibili, o su due diverse versioni del fatto storico — e quindi ricostruirlo secondo la sua corrispondenza alla realtà —, o, come nel caso che andremo ad esaminare, su interpretazioni incompatibili di una stessa norma.

A tal proposito riprendiamo l'esempio che abbiamo discusso nel paragrafo 1.3 con la sentenza 18/96. Come abbiamo visto il secondo comma dell'articolo 1 della legge n. 379/1990 si presta a due interpretazioni incompatibili tra loro: una prevede che venga pagata l'$indennità_1$; e l'altra l'$indennità_2$, tuttavia $indennità_1$ e $indennità_2$ sono relate tra loro come segue:

$$Pagare(indennità_1) \equiv \neg Pagare(indennità_2) \tag{4.1}$$

Possiamo quindi completare la rappresentazione formale del caso in esame come segue:

Fatti

- $reddito_1 = \iota x Percepito(x, a-2)$
- $reddito_2 = \iota x Denunciato(x, a-2)$
- $indennità = f(reddito)$
- $\mathsf{O}_\mathsf{T}(Pagare(indennità))$

Prima interpretazione Secondo questa interpretazione della norma avremo che il reddito da considerare al fine del calcolo dell'indennità è quello percepito nel secondo anno precedente.

$$indennità_1 = f(reddito_1) \tag{I_1}$$

Da cui segue

$$I_1 \Rightarrow \mathsf{O}_\mathsf{T}(Pagare(indennità_1))$$

Seconda interpretazione In questo caso si sostiene che il reddito rilevante è quello denunciato nel secondo anno precedente, pertanto

$$indennità_2 = f(reddito_2) \tag{I_2}$$

Da cui segue

$$I_2 \Rightarrow \mathsf{O}_\mathsf{T}(Pagare(indennità_2))$$

Si vede facilmente che le due interpretazioni sono incompatibili tra di loro, e sono due possibili letture della norma. Infatti date le due interpretazioni I_1 e I_2 si derivano

$$\mathsf{O_T} Pagare(indennità_1) \tag{4.2}$$

e

$$\mathsf{O_T} Pagare(indennità_2) \tag{4.3}$$

Da 4.2 e da 4.1 si ottiene $\mathsf{O_T}\neg Pagare(indennità_2)$ che è contraddittoria rispetto 4.3. Analogamente da 4.3 si ottiene $\mathsf{O_T}\neg Pagare(indennità_1)$ che contraddice 4.3.

In questo caso le due preferenze corrispondono a due differenti interpretazioni della stessa norma e non a due differenti norme di cui è possibile stabilire una gerarchia con uno dei tanti criteri riconosciuti nel diritto (lex posterior, lex superior, specificità, ecc.). Il pretore, dopo aver constato che l'analisi logico-linguistica della formulazione letterale della norma dà origine a questa duplice interpretazione e non è possibile risolverla in tale maniera, si appella, per risolvere il contenzioso, nuovamente all'articolo 12 delle Disposizioni in generale sulla legge del CC, in particolare al 2° comma, che prescrive il ragionamento analogico, o rispetto ad altri casi o norme che regolano circostanze in qualche modo simili.

4.4 *KEM* per *DDL*

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la logica *DDL* e abbiamo mostrato come sia possibile esprimere in essa la ritrattabilità deontica. In questo paragrafo mostreremo come adattare il sistema *KEM* a questa logica e presenteremo un algoritmo che permette di trattare e stabilire gli insiemi di preferenze.

Abbiamo visto come in *DDL* siano presenti diversi tipi di mondi possibili corrispondenti a più modalità; ma, come ormai sappiamo, i vari tipi di mondi e quindi le varie modalità corrisponderanno a indici differenti. Introduciamo dunque gli insiemi di indici appropriati:

- $\Phi_W = \{W_1, W_2, \ldots\}$ e $\Phi_w = \{w_1, w_2, \ldots\}$ per mondi in generale, ovvero mondi per cui non abbiamo informazioni sufficienti per determinarne il tipo.

- $\Phi_D = \{D_1, D_2, \ldots\}$ e $\Phi_d = \{d_1, d_2, \ldots\}$ per i mondi che sono versioni deonticamente ideali.
- $\Phi_S = \{S_1, S_2, \ldots\}$ e $\Phi_s = \{s_1, s_2, \ldots\}$ per i mondi che sono versioni subideali.
- $\Phi_P^n = \{P_1^n, P_2^n, \ldots\}$ e $\Phi_p^n = \{p_1^n, p_2^n, \ldots\}$ per i mondi che sono n-preferiti.

Ci rimangono da definire le unificazioni che caratterizzano DDL (le regole d'inferenza sono le stesse di JP e $S5P_{(n)}$).

$$(i,k)\sigma^{DDL} = \begin{cases} (i,k)\sigma_{S5P_{(n)}} \\ (i,k)\sigma_{JP} \end{cases} \qquad (\sigma^{DDL})$$

e quindi

$$(i,k)\sigma_{DDL} = \begin{cases} (c^n(i), c^m(k))\sigma^{DDL} \\ (i,k)\sigma^{DDL} \end{cases} \qquad (\sigma_{DDL})$$

dove $w_0 = (s^n(i), s^m(k))\sigma_{DDL}$. Qui valgono le spiegazioni intuitive fornite nei paragrafi dedicati a $S5P_{(n)}$ e a JP.

4.4.1 Trattamento delle preferenze

In questo paragrafo forniremo un algoritmo che usa KEM per risolvere i conflitti (o contraddizioni) rifacendosi a quanto descritto nel paragrafo 4.2. I sistemi tableaux, oltre a essere sistemi di dimostrazione automatica, vengono utilizzati anche come generatori di modelli. Come si ricorderà, una dimostrazione via tableaux consiste nella verifica che non esiste un contromodello per la formula (o insieme di formule) che deve essere dimostrata.

Nel seguito utilizzeremo il fatto che l'insieme delle formule di un ramo τ di un albero in KEM è consistente (ha un modello) se il ramo è aperto, altrimenti è inconsistente (non ha un modello). Lo scopo della procedura è quello di ottenere un insieme di formule — corrispondenti a regole e a fatti — consistente. Per prima cosa sottoponiamo l'insieme a un test di consistenza: esaminiamo, con un albero di KEM, l'insieme dato; se l'albero è aperto l'insieme è consistente, se l'albero è chiuso risolviamo le contraddizioni assegnando un operatore di preferenza differente a ogni conseguente di un default che implica una contraddizione. Per determinare quali siano i default che comportano contraddizioni dobbiamo tenere traccia delle dipendenze tra le varie formule conformemente alla definizione 3.28. Durante la costruzione del modello terremo traccia solamente delle dipendenze dalle premesse, cioè non considereremo le dipendenze da formule intermedie. Per risolvere coppie di formule complementari, e quindi assegnare le preferenze di conseguenza, saranno rilevanti solamente le premesse che le implicano essenzialmente, e quindi saranno le uniche a venire prese in considerazione.

Siano A e B due formule complementari di un ramo chiuso τ; siano $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$, rispettivamente, gli insiemi delle premesse da cui dipendono A e B; sia $\mathcal{D}(\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B)$ l'insieme dei default in $\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B$. Si noti che l'insieme dei default $\mathcal{D}(\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B)$, che chiameremo *insieme colpevole*, è il responsabile dell'inconsistenza, dato che abbiamo assunto l'insieme delle premesse come consistente.

Definizione 4.2. Un insieme $S \subseteq D$ è *libero da conflitti* se e solo se non contiene nessun insieme colpevole.

Utilizzeremo KEM per trovare tutti gli insiemi $\mathcal{D}(\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B) \subseteq D$ e le informazioni ricavate nello sviluppo dell'albero saranno usate per costruire tutti gli insiemi massimali di default S liberi da conflitti. Infine assegneremo le preferenze in modo tale che tutte le formule in un insieme massimale libero da conflitti S abbiano la stessa preferenza.

Esempio 4.6. Forniamo un esempio della procedura per stabilire i sottoinsiemi consistenti e assegnare le preferenze.

Sia $\langle F, D\rangle$ una base di conoscenza dove $F = \{p\}$ e $D = \{p \to q, p \to r, p \to s, p \to (\neg q \vee \neg r) \wedge \neg s\}$.

1.	Tq	1
2.	Tr	2
3.	Ts	3
4.	$T(\neg q \vee \neg r) \wedge \neg s$	4
5.	$T\neg q \vee \neg r$	4
6.	Fs	4
7.	Fq	$2, 4$
8.	Fr	$1, 4$

Nella colonna di destra abbiamo riportato le dipendenze (per ragioni di spazio abbiamo eliminato tutte le dipendenze inutili). Dall'analisi delle dipendenze associate alle inconsistenze otteniamo i seguenti insiemi inconsistenti di default: $\{1, 2, 4\}$ e $\{3, 4\}$. Con un semplice calcolo combinatorio otteniamo i seguenti insiemi massimali consistenti $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4\}$ e $\{2, 4\}$ a cui vengono assegnate le preferenze come segue:

$$P_1 \rightsquigarrow \{1, 2, 3\}$$

$$P_2 \rightsquigarrow \{1, 4\}$$

$$P_3 \rightsquigarrow \{2, 4\}.$$

Vale la pena di ricordare che l'abilità di KEM a determinare gli insiemi inconsistenti è dovuta principalmente alle sue regole d'inferenza, e in particolare a PB e alle regole β.

Dopo aver assegnato le preferenze possiamo interrogare la base di conoscenza chiedendo se una formula X è una conseguenza di detta base, semplicemente svolgendo una dimostrazione in KEM per l'insieme di formule consistente nelle premesse e X^C. In pratica procederemo attaccando la dimostrazione di X^C alla fine dell'albero che abbiamo sviluppato per determinare le preferenze, dopo aver sostituito i conseguenti dei default con la loro versione "preferenziale"[8].

4.5 Conclusioni

In questa lavoro abbiamo visto come la logica risulti utile per una formalizzazione del ragionamento normativo, e abbiamo sostenuto che questa formalizzazione costituisce il primo passo verso un sistema di intelligenza artificiale per il ragionamento normativo. In particolare, abbiamo visto come i sistemi deduttivi indicizzati risultano fondamentali per la formalizzazione in quanto consentono trattazioni analitiche del soggetto nei termini di una divisione analitica e di una gerarchizzazione degli argomenti. Il vantaggio dell'analiticità permette di dividere un "problema" nelle sue componenti e di risolverele con gli strumenti più adeguati. È importante sottolineare che questi sistemi permettono di definire nuove logiche più adatte a trattare con il fenomeno in esame. Negli esempi che abbiamo fornito abbiamo mostrato come usare i sistemi deduttivi indicizzati in relazione ad alcuni tipi di ragionamento

[8] Ciò è possibile dal momento che KEM gode della proprietà della sotto dimostrazione, si veda il paragrafo 3.7.

normativo: in particolare abbiamo fornito un modello che consente di trattare alcuni tipi di incompatibilità in ambito normativo e il problema della ritrattabilità deontica.

Il fenomeno del ragionamento normativo è estremamente complesso e non era nostra intenzione fornirne un modello complessivo. Tuttavia è possibile ritenere che gli strumenti concettuali e tecnici forniti dalla logica modale e dai LDS, nella forma che abbiamo esposto in questo lavoro, possano venire estesi a frammenti sempre più significativi di ragionamento normativo. A tal proposito vogliamo brevemente accennare alcuni possibili sviluppi. Nella sezione 1.3 abbiamo menzionato la necessità di una logica che contempli vari gradi gerarchici sia tra le norme stesse, sia tra le varie autorità e soggetti. A tal fine è possibile usare logiche multimodali gerarchiche, generalizzando quanto esposto nelle sezioni 2.6 e 3.5.3, imponendo restrizioni da una parte sull'ordine in cui le modalità possono venire nidificate, e dall'altra sulle applicazioni delle $\sigma^{A_1^l \cdots A_n^l}$ corrispondenti alle logiche che formano il sistema multimodale usato per rappresentare, ad esempio, i rapporti fra norme primarie e norme secondarie. L'altro aspetto menzionato, concernente le gerarchie, riguarda le autorità e i soggetti; per questi dobbiamo introdurre la nozione di individuo e quindi passare dalla logica (modale) proposizionale alla logica (modale) predicativa. Come è noto[9], i principali problemi della logica modale predicativa risiedono nel trattamento degli individui rispetto al cambiamento del domino di quantificazione relativamente alla situazione (mondo possibile). Questo problema viene risolto dai sistemi deduttivi indicizzati che abbiamo presentato nel capitolo 3 una volta che indicizziamo a loro volta gli indici con i nomi per gli individui[10]. A questo punto si possono integrare e combinare tra loro metodiche per trattare autorità e agenti[11] e i metodi che abbiamo qui sviluppato. L'idea di indicizzare a loro volta gli indici si mostra proficua, dal momento che, possiamo indicizzare gli indici rispetto a formule, ad esempio (w_2^A, w_1), può venire interpretato come uno dei mondi nella sfera dei mondi di w_1 dove A è vera. Questa rappresentazione corrisponde alla

[9]Si vedano ad esempio (Hughes and Cresswell 1968, Hughes and Cresswell 1996).

[10]A tal proposito si vedano (Artosi, Benassi, Governatori and Rotolo 1996, Artosi, Benassi, Governatori and Rotolo 1997).

[11]Si vedano ad esempio (Bailache 1991, Krogh and Herrestad 1996, Lomuscio and Colombetti 1996).

semantica dei condizionali controfattuali[12] che si sono rivelati estremamente fecondi nell'analisi del ragionamento normativo[13]. Il vantaggio del sistema che abbiamo sviluppato consiste nel poter fondere tra loro, anche a livelli differenti, diversi tipi di logiche: le logiche che si possono ritenere le più adatte a trattare ciascuno dei settori del fenomeno che vogliamo trattare.

[12](Lewis 1986)

[13]Si vedano (Hansson 1969, Alchourrón 1993, Lewis 1986, Jones 1991, Makinson 1993).

Bibliografia

ABADI, M. AND Z. MANNA. Modal theorem proving. In Siekmann, J. (cur.), *Proceedings of the 8th International Conference on Automated Deduction*, *LNCS* vol. 230, pp. 172–189. Springer-Verlag, Berlin, (1986).

ALCHOURRÓN, C. E. Philosophical foundations of deontic logic and the logic of defeasible conditionals. In Meyer, J.-J. and R. Wieringa (cur.), *Deontic Logic in Computer Science: Normative System Specification*, pp. 43–84. Wiley & Sons, (1993).

ALCHOURRÓN, C. E. AND E. BULYGIN. *Normative Systems*. Springer, Wien, (1971).

ALCHOURRÓN, C. E. AND D. MAKINSON. Hierarchies of regulations and their logic. In Hilpinen, R. (cur.), *New Studies in Deontic Logic*, pp. 95–124. Reidel, Dordrecht, (1981).

ALCHOURRÓN, C. E. E A. A. MARTINO. Logica senza verità. In Mariani, P. and D. Tiscornia (cur.), *Sistemi esperti giuridici*, pp. 277–303. Franco Angeli, Milano, (1989).

ALLEN, L. E. AND C. S. SAXON. Analysis of the logical structure of legal rules by a modernized and formalized version of Hohfeld legal conceptions. In Martino, A. and F. S. Natali (cur.), *Automated Analysis of Legal Texts*. North Holland, Amsterdam, (1986).

ANDERSON, A. R. The formal analysis of normative systems. In Rescher, N. (cur.), *The Logic of Decision and Action*, pp. 147–213. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, (1956).

ANDERSON, A. R. A reduction of deontic logic to alethic modal logic. *Mind* 67: 100–103, (1958).

ÅQVIST, L. Deontic logic. In Gabbay, D. and F. Guenthner (cur.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, pp. 605–714. Kluwer, Dordrecht, (1984).

ÅQVIST, L. *An Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*. Indices. Bibliopolis, Naples, (1985).

ARTOSI, A., P. BENASSI, G. GOVERNATORI AND A. ROTOLO. Labelled proofs for quantified modal logic. In Alfares, J., L. M. Pereira and E. Orlowska (cur.), *Logics in Artificial Intelligence*, LNAI no. 1126, pp. 70–86, Berlin. Springer-Verlag, (1996).

Artosi, A., P. Benassi, G. Governatori and A. Rotolo. Shakespearian modal logic. In Kracht, M., M. de Rijke, H. Wansing and M. Zakharyaschev (cur.), *Advances in Modal Logic*, CSLI Lecture Notes. CSLI Publications, Stanford, (1997).

Artosi, A., P. Cattabriga and G. Governatori. A prolog implementation of KEM. In Alpuente, M. and M. I. Sessa (cur.), *Proceedings of GULP-PRODE'95*, pp. 395–400. Università di Salerno, Salerno, (1995).

Asher, N. and D. Bonevac. *Prima facie* obligation. *Studia Logica* 57: 19–45, (1996).

Auffray, Y. and P. Enjalbert. Modal theorem proving: an equational view-point. *Journal of Logic and Computation* 2: 247–259, (1992).

Bailache, P. Authorities and addressees in deontic logic: indexed operators and action. In Meyer, J.-J. C. and R. Wieringa (cur.), *Deon 91*, pp. 72–88, Amsterdam. (1991).

Beth, E. W. On Padoa's method in the theory of definition. *Indagationes Mathematicae* 15: 330–339, (1953).

Boolos, G. *The Unprovability of Consistence.* Cambridge University Press, Cambridge, (1979).

Boolos, G. Don't eliminate cut. *Journal of Philosophical Logic* 7: 373–378, (1984).

Boolos, G. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

Bowen, K. A. *Model Theory for Modal Logic.* Reidel, Dordrecht, (1979).

Brewka, G. Belief revision in a framework for default reasoning. In Fuhrmann, A. and M. Moreau (cur.), *The Logic of Theory Change*, pp. 206–222. Springer-Verlag, Berlin, (1989).

Brewka, G. *Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense.* Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

Bull, R. A. and K. Segerberg. Basic modal logic. In Gabbay, D. and F. Guenthner (cur.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, pp. 1–88. Reidel, Dordrecht, (1984).

Bulygin, E. Time and validity. In Martino, A. (cur.), *Deontic Logic,* *Computational Linguistics and Legal Information Systems*, pp. 65–82. North-Holland, Amsterdam, (1982).

Carnap, R. *Significato e necessità*. La Nuova Italia, Firenze, (1976). Trad. It. di *Meaning and Necessity*, University of Chicago, Chicago 1956 (2 ed.).

Catach, L. Tableaux: a general theorem prover for modal logics. *Journal of Automated Reasoning* 7: 489–510, (1991).

Cattabriga, P. KEM implemented. Annali dell'Università di Ferrara, Nuova Serie, Sezione III, Filosofia, Discussion Paper n. 47, Ferrara, (1996).

Cha, H. F. Proof search for a modal substructural logic based on labelled deductive system. In Voronkov, A. (cur.), *Logic Programming and Automated Reasoning*, LNAI, pp. 64–75. Springer-Verlag, Berlin, (1993).

Chellas, B. *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, (1980).

Chisholm, R. Contrary-to-duty imperative and deontic logic. *Analysis* 24: 33–36, (1963).

Cresswell, M. J. *Structured Meanings*. Bradford Books, Cambridge, Mass., (1985).

Cresswell, M. J. *Entities and Indices*. Kluwer, Dordrecht, (1990).

Cresswell, M. J. *Language in the World*. Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

D'Agostino, M. *Investigations into the Complexity of Some Propositional Calculi*. Tesi di dottorato, Oxford University Computing Laboratory, (1990).

D'Agostino, M. and D. M. Gabbay. A generalization of analytic deduction via labelled deductive systems. Part I: Basic substructural logics. *Journal of Automated Reasoning* 13: 243–281, (1994).

D'Agostino, M. and D. M. Gabbay. Fibred tableaux for multi-implication logics. In Miglioli, P., U. Moscato, D. Mundici and M. Ornaghi (cur.), *Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods*, LNAI no. 1071, pp. 16–35. Springer-Verlag, Berlin, (1996).

D'Agostino, M., D. M. Gabbay and A. Russo. Grafting modalities onto substructural implication systems. Rap. tecn., Department of Computing, Imperial College, London, (1996).

D'Agostino, M. and M. Mondadori. The taming of the cut. *Journal of Logic and Computation* 4: 285–319, (1994).

DEMRI, S. Uniform and non uniform strategies for tableaux calculi for modal logics. *Journal of Applied Non-Classical Logics* 5: 77–96, (1995).

DIGNUM, F., J.-J. C. MEYER AND R. J. WIERINGA. A dynamic logic for reasoning about sub-ideal states. In Breuker, J. (cur.), *Artificial Normative Reasoning*, pp. 79–92. ECAI, Amsterdam, (1994).

DOŠEN, K. A historical introduction to sustructural logics. In Schroeder, P. and K. Došen (cur.), *Substructural Logics*, pp. 1–30. Oxford University Press, New York, (1993).

EPSTEIN, R. L. *The Semantic Foundations of Logic. Volume 1: Propositional Logics*. Kluwer, Dordrecht, (1990).

EPSTEIN, R. L. *The Semantic Foundations of Logic: Predicate Logic*. Oxford University Press, Oxford, (1994).

FERRAJOLI, L. *Teoria assiomatizzata del diritto*. Giuffrè, Milano, (1970).

FINGER, M. AND D. M. GABBAY. Adding a temporal dimension to a logic system. *Journal of Logic, Linguage and Information*, 1: 221–237, (1993).

FISHER-SERVI, G. Semantics for a class of intuitionistic modal logic. In dalla Chiara, M. L. (cur.), *Italian Studies in the Philosophy of Science*, pp. 59–72. Reidel, Dordrecht, (1981).

FITCH, F. B. Intuitionistic modal logic with quantifiers. *Portugalliae Mathematica* 7: 113–118, (1948).

FITCH, F. B. Natural deduction for obligation. *American Philosophical Quartely* 3: 27–38, (1966a).

FITCH, F. B. Tree proofs in modal logic. *Journal of Symbolic Logic* 31: 152, (1966b).

FITTING, M. Tableau methods of proof for modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 13: 237–247, (1972).

FITTING, M. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. Reidel, Dordrecht, (1983).

FITTING, M. First-order modal tableaux. *Journal of Automated Reasoning* 4: 191–213, (1988).

GABBAY, D. M. *Investigations in Modal and Tense Logics*. Reidel, Dordrecht, (1976).

GABBAY, D. M. Classical vs non-classical logics. In Gabbay, D. M., C. Hogger and J. Robinson (cur.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, vol. 2, pp. 359–500. Oxford University Press, Oxford, (1994).

Gabbay, D. M. Fibred semantics and the weaving of logic, I. *Journal of Symbolic Logic* 61: 1057–1120,(1996a).

Gabbay, D. M. *Labelled Deductive System.* Oxford University Press, Oxford, (1996b).

Gabbay, D. M. An overview of fibred semantics and the combination of logic. In F. Baader and K. Schulz (eds.), *Frontieres of Combinng Systems*, Kluwer, Dordrecht, pp. 1–55, (1996c).

Galvan, S. *Logiche intensionali.* Franco Angeli, Milano, (1991).

Geneseret, M. Information integration. Intervento presentato a JELIA'96, Evora, Portogallo, (1996).

Gent, I. Theory matrices (for modal logics) using alphabetical monotonicity. *Studia Logica* 52: 233–257, (1993).

Ginsberg, M. L. Bilattices and modal operators. *Journal of Logic and Computation* 1: 41–69, (1990).

Gödel, K. Eine interpretation des intuitionistischen aussangenkalkulus. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 4: 34–40, (1933).

Goldblatt, R. Metamathematics for modal logic I. *Reports on Mathematical Logic* 6: 41–78, (1976).

Goldblatt, R. Metamathematics for modal logic II. *Reports on Mathematical Logic* 7: 21–52, (1977).

Goldblatt, R. *Logic of Time and Computation.* CSLI, Stanford, (1992).

Goré, R. Tableau methods for modal and temporal logics. Rap. Tecn. TR-ARP-15-95, Automated Reasoning Project, Australian National University, (1995).

Goré, R., A. Heuerding and W. Heinle. Relations between propositional normal logics: an overview. Technical Report TR-16-95, Automated Reasoning Project, Australian National University, (1995).

Halpern, J. Y. and Y. Moses. A guide to completeness and complexity for modal logic of knowledge and belief. *Artificial Intelligence* 54: 319–379, (1992).

Hanson, W. Semantics for deontic logic. *Logique at Analyse* 31: 177–190, (1965).

Hansson, B. An analysis of some deontic logics. *Noûs* 3: 373–398, (1965).

Harel, D. Dynamic logic. In Gabbay, D. and F. Guenthner (cur.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, pp. 497–604. Reidel, Dordrecht, (1984).

HINTIKKA, J. Quantifiers in deontic logic. *Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Humanorum Litterarum* 23, (1957).

HINTIKKA, J. The modes of modality. *Acta Philosophica Fennica* 23: 65–82, (1963).

HINTIKKA, J. Modality and quantification. *Theoria* 27: 119–128, (1967).

HORTY, J. F. Moral dilemmas and nonmonotonic reasoning. *Journal of Philosophical Logic* 23: 35–65, (1994).

HUGHES, G. AND M. CRESSWELL. *An Introduction to Modal Logic*. Methuen, London, (1968).

HUGHES, G. AND M. CRESSWELL. *A Companion to Modal Logic*. Methuen, London, (1984).

HUGHES, G. AND M. CRESSWELL. *A New Introduction to Modal Logic*. Rutledge, London, (1996).

HUMBERSTONE, I. L. From world to possibilities. *Journal of Philosophical Logic* 10: 313–339, (1981).

JACKSON, P. AND H. REICHGELT. *Logic-Based Knowledge Representation*, cap. A General Proof Method for Modal Predicate Logic, pp. 177–228. MIT Press, Cambridge Mass., (1989).

JONES, A. J. On the logic of deontic conditionals. *Ratio Juris* 4: 355–366, (1991).

JONES, A. J. I. AND I. PÖRN. Ideality, sub-ideality and deontic logic. *Synthese* 65: 275–290, (1985).

JONES, A. J. I. AND I. PÖRN. "Ought" and "Must". *Synthese* 66: 89–93, (1986).

JÓNSSON, B. AND A. TARSKI. Boolean algebras with operators. *American Journal of Mathematics* 73: 891–939, (1951).

KANGER, S. The morning star paradox. *Theoria* 23: 1–11, (1957a).

KANGER, S. A note in quantification and modalities. *Theoria* 23: 131–134, (1957b).

KANGER, S. *Provability in logic*. No. 1 in Stockholm Studies in Philosophy. Almqvist & Wiksell, Stockholm, (1957c).

KANGER, S. New foundation of ethical theory. In Hilpinen, R. (cur.), *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*, pp. 36–58. Reidel, Dordrecht, (1971).

KELSEN, H. Sulla logica delle norme. *Materiali per una cultura giuridica* XIX: 454–468, (1989).

KRACHT, M. Highway to the danger zone:. *Journal of Logic and Computation* 5: 93–110, (1995).

KRACHT, M. *Tools and Techniques in modal Logic.* FU Berlin, Berlin, (1996).

KRACHT, M. AND F. WOLTER. Properties of indipendently axiomatizable bimodal logics. *Journal of Symbolic Logic* 56: 1485–1991, (1991).

KRIPKE, S. Identity and necessity. In Munitz, M. K. (cur.), *Identity and Individuals*, pp. 135–64. New York University Press, New York, (1971).

KRIPKE, S. A. A completness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic* 24: 1–14, (1959).

KRIPKE, S. A. Semantical analysis of modal logic I: Normal propositional calculi. *Zeitschrift für Logik und Grundlagen der Mathematik* 9: 67–96, (1963).

KRIPKE, S. A. Semantical analysis of modal logic II. In Addison, Henkin and Tarski (cur.), *The Theory of Models*, pp. 206–220. North Holland, Amsterdam, (1965).

KROGH, C. AND H. HERRESTAD. Getting personal. some notes on the relationship between personal and impersonal obligation. In Brown, M. and J. Carmo (cur.), *Deontic Logic Agency and Normative Systems*, pp. 134–153. Springer-Verlag, Berlin, (1996).

LEMMON, E. J. New foundation for Lewis modal systems. *Journal of Symbolic Logic* 22: 176–186, (1957).

LEMMON, E. J. *Elementi di logica.* Laterza, Bari, (1986).

LEMMON, E. J. AND D. SCOTT. *Introduction to Modal Logic (Lemmon Notes).* Blackwell, (1977).

LEWIS, C. AND C. LANGFORD. *Symbolic Logic.* Dover, New York, (1932 2°ed. 1959).

LEWIS, C. I. *A Survey of Symbolic Logic.* University of California, Berkley, (1918).

LEWIS, D. *Counterfactuals.* Basil Blackwell, Oxford, (1986).

LOMUSCIO, A. AND M. COLOMBETTI QLB a quantified logic for belief. In Müller, J. P., M. J. Wooldridge and N. R. Jennings (cur.), *Intelligent Agent III*, LNAI no. 1193. Springer-Verlag, Heidelberg, (1994).

MAKINSON, D. Five faces of minimality. *Studia Logica* 52: 339–379, (1993).

MASSACCI, F. Strongly analytic tableaux for normal modal logic. In Bundy, A. (cur.), *CADE-12*, LNAI no. 814, pp. 723–737. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

MEYER, J.-J. C. A simple solution to the 'deepest' paradox in deontic logic. *Logique et Analyse* 117–118: 81–90, (1987).

MEYER, J.-J. C. A different approach to deontic logic viewed as a variant of dynamic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 29: 109–136, (1988).

MEYER, J. AND W. VAN DER HOECK. A modal logic for nonmonotonic reasoning. In van der Hoeck, W., J. Meyer, Y. H. Tan and C. Witteveen (cur.), *Non-Monotonic Reasoning and Partial Semantics*, pp. 37–77. Ellis Horwood, New York, (1992).

MAZZARESE, T. *Logica deontica e linguaggio giuridico.* CEDAM, Padova, (1989).

MCCARTY, L. Defeasible deontic reasoning. *Fundamenta Informaticae* 21: 125–148, (1994).

MCKINSEY, J. A solution to the decision problem for the Lewis systems S2 e S4, with an application to topology. *Journal of Symbolic Logic* 6: 117–134, (1941).

MCKINSEY, J. On the syntattical construction of modal logic. *Journal of Symbolic Logic* 10: 109–13, (1945).

MCKINSEY, J. AND A. TARSKI. The algebra of topology. *Annales of Mathematics* 45: 141–181, (1944).

MCKINSEY, J. AND A. TARSKI. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *Journal of Symbolic Logic* 13: 1–15, (1948).

MENDELSON, E. *Introduzione alla logica matematica.* Boringhieri, Torino, (1972).

MONTAGUE, R. Logical necessity, physical necessity, ethics, and quantifiers. In Thomason, R. H. (cur.), *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*, pp. 71–83. Yale University Press, New Heaven, (1974).

MORIKAWA, O. Some modal logics based on three valued logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 30: 130–137, (1989).

OHLBACH, H. J. Semantics based translation methods for modal logics. *Journal of Logic and Computation* 1: 691–746, (1991).

OSTERMAN, P. Many-valued modal propositional calculi. *Zeitschrift für Logik und Grundlagen der Mathematik* 34: 343–354, (1988).

Pitt, J. and J. Cunningham. Distributed modal theorem proving with KE. In Miglioli, P., U. Moscato, D. Mundici and M. Ornaghi (cur.), *Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods*, LNAI no. 1071, pp. 160–176. Springer-Verlag, Berlin, (1996).

Prakken, H. Two approaches to the formalisation of defeasible deontic reasoning. *Studia Logica* 57: 73–90, (1996).

Prawitz, D. *Natural Deduction*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, (1965).

Prior, A. N. *Time and Modality*. Oxford University Press, Oxford, (1957).

Quine, W. V. O. *Manuale di logica*. Feltrinelli, Milano, (1959).

Reiter, R. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence* 13: 81–132, (1980).

Rich, E. Artificial intelligence. In Shapiro, S. C. and D. Eckroth (cur.), *Encyclopedia of Artificial intelligence*, pp. 9–16. John Willey & Sons, New York, (1987).

Royakkers, L. *Representing legal rules in deontic logic*. Tesi di dottorato, Katholieke Universiteit Brabant, Tilburg, (1996).

Royakkers, L. and F. Dignum. Deontic inconsistencies and authorities. In Breuker, J. (cur.), *Artificial Normative Reasoning*, pp. 93–105. ECAI, Amsterdam, (1994).

Russo, A. *Modal Logics as Labelled Deductive Systems*. Tesi di dottorato, Imperial College, London, (1996).

Ryu, Y. U. and R. M. Lee. Defeasible deontic reasoning. In Meyer, J.-J. C. and R. Wieringa (cur.), *Proceedings of the Second International Workshop on Deontic Logic in Computer Science*, pp. 347–363, Amsterdam. (1991).

Sartor, G. *Le applicazioni giuridiche dell'intelligenza artificiale*. Giuffrè, Milano, (1990).

Sartor, G. The structure of norm conditions and nonmonotonic reasoning in law. In *Proceedings of the Third International Conference on Artificial Intelligence and Law*, pp. 155–164. ACM Press, (1991).

Sartor, G. *Linguaggio giuridico e linguaggi di programmazione*. CLUEB, Bologna, (1992).

Schwind, C. and P. Siegel. A modal logic for hypothesis theory. *Fundamenta Informaticae* 21: 89–102, (1994).

Scott, D. Advice in modal logic. In Lambert, K. (cur.), *Philosophical Problems in Logic*, pp. 143–173. Reidel, Dordrecht, (1970).

Scott, D. Completeness and axiomatizability in many valued logic. In *Proceedings of Tarski Symposium*, pp. 411–436, Providence. American Mathematical Society, (1974).

Segerberg, K. Some modal logics based on three valued logic. *Theoria* 33: 53–71, (1967).

Segerberg, K. *An Essay in Classical Modal Logic*, vol. 13 di *Filosofiska Studier*. Uppsala Universitet, Uppsala, (1971).

Siegel, P. and C. Schwind. Modal logic based theory for non-monotonic reasoning. *Journal of Applied Non-Classical Logics* 3: 73–92, (1993).

Simpson, A. K. *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. Tesi di dottorato, University of Edinburgh, (1994).

Smullyan, R. Analytic cut. *Journal of Symbolic Logic* 33: 549–559, (1968a).

Smullyan, R. *First-Order Logic*. Springer-Verlag, Berlin, (1968b).

Smullyan, R. *Forever Undecided*. Oxford University Press, Oxford, (1988).

Susskind, R. *Expert Systems in Law. A Jurisprudential Inquiry*. Clarendon Press, Oxford, (1987).

Tarello, G. *Diritto, enunciati, usi*. Il Mulino, Bologna, (1974).

Tarski, A. La fondazione della semantica scientifica. In Bonomi, A. (cur.), *La struttura logica del linguaggio*, pp. 425–432. Bompiani, Milano, (1973).

Tarski, A. The concept of truth in formalized language. In Corcoran, J. (cur.), *Logic, Semantics and Metamathematics*, pp. 152–278. Hackett, Indianapolis, (1983).

Thomason, R. H. Deontic logic as founded on tense logic. In Hilpinen, R. (cur.), *New Studies in Deontic logic*, pp. 165–176. Reidel, Dordrecht, (1981).

Thomason, R. H. Combinations of tense and modality. In Gabbay, D. and F. Guenthner (cur.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, pp. 135–165. Reidel, Dordrecht, (1984).

van Benthem, J. Correspondence theory. In Gabbay, D. and F. Guenthner (cur.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. II, pp. 167–247. Reidel, Dordrecht, (1984).

van Eck, J. *A System of Temporally Relative Modal and Deontic Logic and Its Philosophical Implications*. Tesi di dottorato, University of Groningen, (1981).

von Wrigth, G. H. Deontic logic. *Mind* 60: 1–15, (1951a).

von Wrigth, G. H. *An Essay in Modal Logic.* North Holland, Amsterdam, (1951b).

von Wrigth, G. H. Norme, verità e logica. *Informatica e diritto* 10: 5–87, (1983).

von Wrigth, G. H. *Norma e azione. Un'analisi logica.* Il Mulino, Bologna, (1989).

Wallen, L. *Automated Deduction in Nonclassical Logics.* MIT Press, Cambridge Mass., (1990).

Wójcicki, R. *Theory of Logical Calculi.* Kluwer, Dordrecht, (1989).

Wolter, F. Fusions of modal logic revised. In Kracht, M., M. de Rijke, H. Wansing and M. Zakharyaschev (cur.), *Advances in Modal Logic*, CSLI Lecture Notes. CSLI publications, Stanford, (1997).

Zakharyaschev, M., F. Wolter and A. Chagrov. Advanced modal logic. Rap. Tecn. IS-RR-96-0027F, JAIST, Hokuriku, (1996). Chapter of the new edition of Hanbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay and F. Guenthner eds.